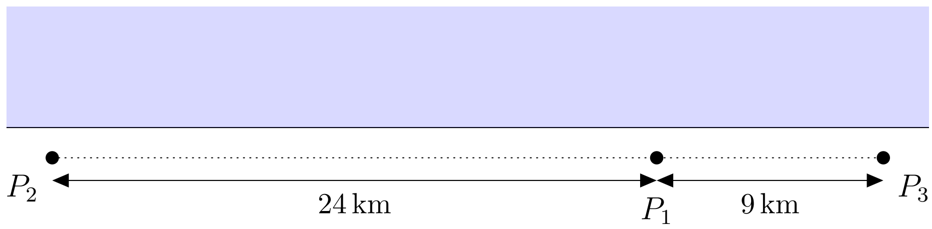
Kuželosečky – určení polohy (průsečík dvou hyperbol)

Zadání:

Na pobřeží jsou rozmístěny tři přijímače P_1, P_2, P_3, které leží v jedné přímce. Známé vzdálenosti zachycuje obrázek 1.

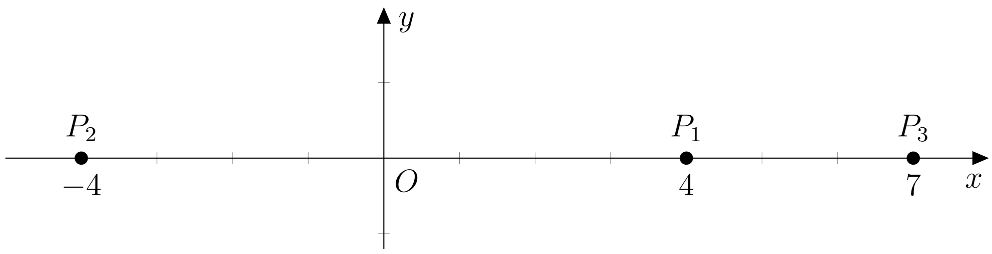


Obrázek 1: Zadání úlohy

Lodní navigace vyšle signál ke všem čtyřem přijímačům. Jestliže signál dorazí k přijímači P_2 o 40 µs dříve než k přijímači P_1 a k přijímači P_3 o 20 µs později než k přijímači P_1, kde se loď nachází? Polohu určete v souřadnicích ve vhodně zavedené soustavě souřadnic. Dále předpokládejte, že signál urazí 300 000 km za sekundu.

Řešení:

Nejprve zavedeme vhodnou kartézskou soustavu souřadnic. Umístíme počátek soustavy O do středu úsečky P_1P_2, kladný směr osy x bude určovat polopřímka OP_1 a kladný směr osy y zvolíme tak, aby druhé souřadnice polohy na moři byly kladné (viz obrázek 2). Jednotka na osách bude shodná a bude odpovídat 3 km. Dostáváme tak $P_1[4; 0]$, $P_2[-4; 0]$ a $P_3[7; 0]$.



Obrázek 2: Zavedení soustavy souřadnic

Označme neznámou polohu lodi L. Protože se loď jistě vyskytuje na moři, platí pro její druhou souřadnici $y_L > 0$. Protože signál dorazí k přijímači P_2 o 40 µs dříve než k přijímači P_1, nachází se Adam od přijímače P_1 o 12 km dále než od přijímače P_2. Množina všech bodů v rovině, které jsou od bodu P_2 vzdáleny o 4 jednotky (odpovídajících vzdálenosti 12 km) méně než od bodu P_1, je jedna větev hyperboly h_1 s ohnisky P_1 a P_2 a středem O. Na této větvi pak musí ležet bod L a je zřejmé, že se jedná o větev bližší bodu P_2, tedy $x_L < 0$.

Obdobně odvodíme, že se loď nachází od přijímače P_3 o 6 km (tj. o 2 jednotky) dále než od přijímače P_1, a proto bod L leží také na větvi hyperboly h_2 s ohnisky P_1 a P_3 a středem v bodě $S\left[\frac{11}{2};0\right]$. Konkrétně se jedná o větev bližší bodu P_1, tedy $x_L < \frac{11}{2}$. Připomeňme však, že jsme v předchozím odstavci omezili x_L na záporná čísla, která novou podmínku splňují.

Určeme nyní parametry a středové rovnice obou hyperbol. Využijeme skutečnosti, že rozdíl $|LP_1| - |LP_2|$ (resp. rozdíl $|LP_3| - |LP_1|$) je dvojnásobkem velikosti hlavní poloosy hyperboly a dále vztahu platného v každé hyperbole $e^2 = a^2 + b^2$ (kde e je excentricita a a, b velikosti poloos).

Parametry hyperboly h_1:

- excentricita $e_1 = |OP_1| = 4$;
- hlavní poloosa $a_1 = \frac{|LP_1|-|LP_2|}{2} = 2$;
- vedlejší poloosa $b_1 = \sqrt{e_1^2 - a_1^2} = 2\sqrt{3}$.

Středová rovnice hyperboly:

$$h_1\colon \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Parametry hyperboly h_2:

- excentricita $e_2 = |SP_1| = \frac{3}{2}$;
- hlavní poloosa $a_2 = \frac{|LP_3|-|LP_1|}{2} = 1$;
- vedlejší poloosa $b_2 = \sqrt{e_2^2 - a_2^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Středová rovnice hyperboly:

$$h_2\colon \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{4y^2}{5} = 1$$

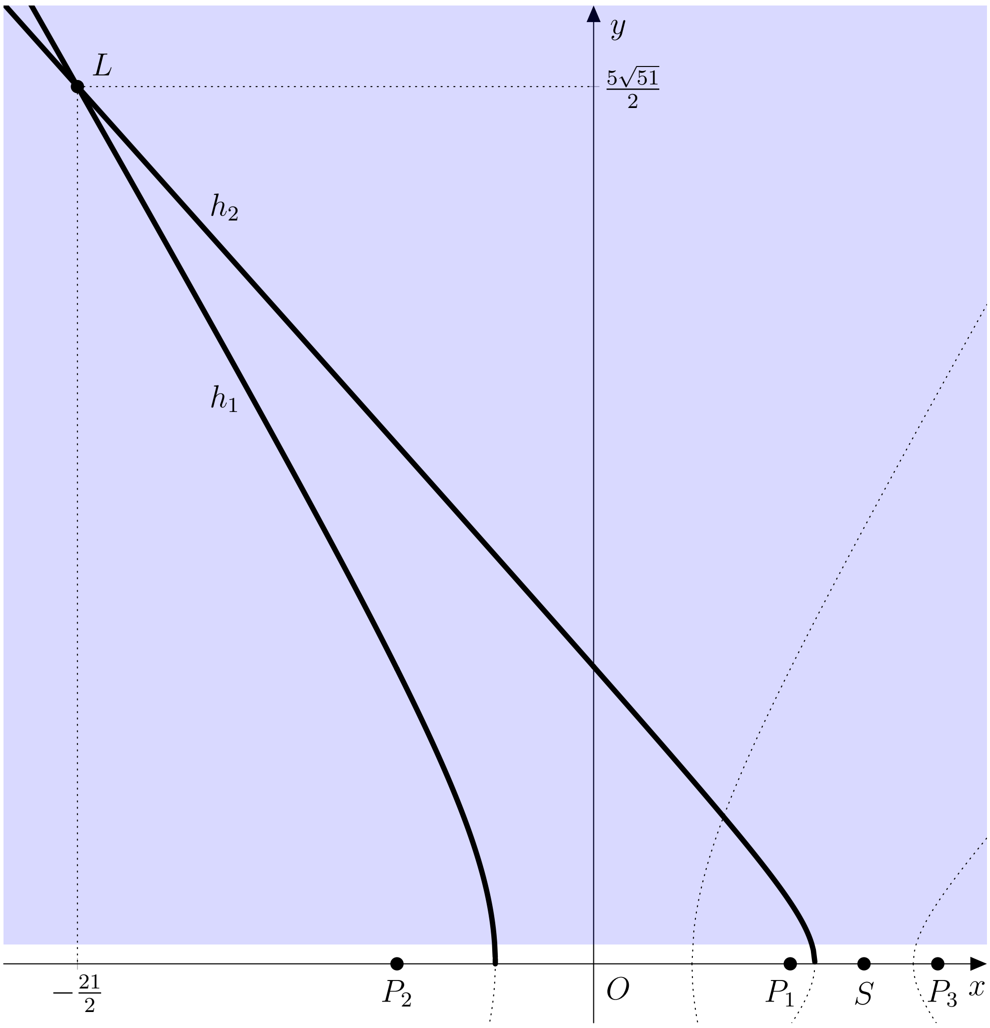
Bod L je průsečíkem obou hyperbol, tedy je řešením soustavy dvou kvadratických rovnic výše. Z rovnice hyperboly h_1 dostáváme rovnost $y^2 = 3x^2 - 12$, kterou dosadíme do druhé rovnice:

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{4}{5} \cdot \left(3x^2 - 12\right) = 1$$
$$x^2 - 11x + \frac{121}{4} - \frac{12}{5}x^2 + \frac{48}{5} - 1 = 0$$
$$28x^2 + 220x - 777 = 0$$

Řešením kvadratické rovnice dostáváme dvojici kořenů $x_1 = -\frac{21}{2}$ a $x_2 = \frac{37}{14}$, z nichž podmínce $x_L < 0$ vyhovuje pouze x_1. Vypočteme zbylou souřadnici dosazením:

$$y^2 = 3x^2 - 12$$
$$y^2 = 3 \cdot \left(-\frac{21}{2}\right)^2 - 12$$
$$y^2 = \frac{1275}{4}$$

Podmínce $y_L > 0$ vyhovuje jediné řešení, a to $y = \frac{5\sqrt{51}}{2}$. **Hledaný bod L má proto souřadnice $\left[-\frac{21}{2}; \frac{5\sqrt{51}}{2}\right]$.** Řešení je znázorněno na obrázku 3.



Obrázek 3: Řešení úlohy

Poznámka. Technické podrobnosti k metodě lze nalézt např. v článku [1].

Literatura

[1] K. Fujii, Y. Sakamoto, W. Wang, H. Arie, A. Schmitz, S. Sugano: *Hyperbolic Positioning with Antenna Arrays and Multi-Channel Pseudolite for Indoor Localization.* Sensors 2015, 15(10), str. 25157–25175.