PODOBNÉ TROJÚHELNÍKY (2 cvičení)

(1) Vlastnosti středních příček trojúhelníku jsme dříve dokázali pomocí vět o shodnosti Δ. Ukažte nyní, jak snadno plynou z vět o podobnosti Δ.

(2) Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že pro vnitřní bod K strany AB a vnitřní bod L strany AC platí $KL \parallel BC$, právě když oba poměry $|AK| : |KB|$ a $|AL| : |LC|$ mají stejnou hodnotu.

(3) Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Dokažte, že platí $AB \parallel CD$, právě když $|AP| \cdot |DP| = |BP| \cdot |CP|$.

(4) Dokažte, průsečík P úhlopříček lichoběžníku $ABCD$, v němž $AB \parallel CD$, je středem té úsečky s krajními body na jeho ramenech, která prochází bodem P rovnoběžně se základnami. Pak vyjádřete její délku pomocí délek $a = |AB|$ a $c = |CD|$ (vyjde jejich *harmonický průměr*).

(5) Je dán trojúhelník ABC a kladná reálná čísla p, q. Body K a L leží po řadě na stranách BC a AC tak, že $|BK| : |KC| = 1 : p$ a $|AL| : |LC| = 1 : q$. Dokažte, že úsečka AK je úsečkou BL proťata v bodě M, pro který platí $|AM| : |MK| = (p+1) : q$. [Návod: Uvažte ještě bod $N \in LC$, pro který platí $KN \parallel BL$.]

(6) Je dána kružnice $k(S, r)$ s průměrem AB a tečnou t v bodě A. Vypočtěte poloměr R té kružnice $l(O, R)$ s neznámým středem O na kružnici k, která prochází bodem B a dotýká se přímky t. [Návod: Užijte jednu z Eukleidových vět pro trojúhelník ABO k sestavení rovnice pro hledaný poloměr R.]

(7) Z úseček daných délek a, b, c, d sestrojte úsečky délek

$$\text{a) } \sqrt{a^2+b^2+2c^2}, \quad \text{b) } \frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{c}\ (a>b), \quad \text{c) } \frac{a^2b}{cd},$$
$$\text{d) } \sqrt{ab+cd}, \quad \text{e) } a\sqrt[4]{2}.$$

[Návod: Využijte toho, že $a\sqrt[4]{2} = \sqrt{a\sqrt{2}\cdot a}$.]

(8) Ukažte, že rovnosti $v^2 = c_a \cdot c_b$ a $a^2 = c_a \cdot c$ z Eukleidových vět jsou důsledky obecného poznatku o mocnosti bodu ke kružnici.

(9) Nechť BP a CQ jsou výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC. Dvojím způsobem dokažte podobnost $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, a to užitím úhlů, resp. mocnosti.

(10) Dvě tětivy AB, CD téže kružnice se protínají v bodě M. Dokažte rovnost $\dfrac{|AC|\cdot|AD|}{|AM|} = \dfrac{|BC|\cdot|BD|}{|BM|}$. [Návod: Zlomky $\dfrac{|AC|}{|BD|}$ a $\dfrac{|AD|}{|BC|}$ vyjádřete z dvojic podobných trojúhelníků a pak je mezi sebou vynásobte.]

(11) V kružnici opsané trojúhelníku ABC sestrojme libovolnou tětivu CN, která protne stranu AB ve vnitřním bodě, který označíme M. Dokažte, že rovnost $|CM| \cdot |CN| = |AC|^2$ nastane právě v případě, kdy $|AC| = |BC|$. [Návod: Rovnost upravte na $|CM| : |CA| = |CA| : |CN|$ a pak uvažte dva vhodné trojúhelníky.]

KONEC DOKUMENTU