10. Shodná zobrazení, vlastnosti a klasifikace

Intuitivní přístup k shodným zobrazením. Dvojí význam termínu shodnost. Symbolika a termíny spojené se zobrazením v rovině.
Středoškolská definice shodného zobrazení.
Obecné vlastnosti shodných zobrazení. Shodnosti přímé a nepřímé.
Kolik existuje shodností, které zobrazí dané body A, B ($A \neq B$) po řadě na dané body A', B'?
Klasifikace shodných zobrazení na pět druhů, definice nejméně známého z nich.
Shodná zobrazení jako výsledky složení několika osových souměrností.
Konstrukce shodného zobrazení k zadané shodnosti $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Shodné zobrazení si představujeme jako výsledek určitého pohybu (přemístění) bodů i celých útvarů v rovině. Při něm se proto zachová tvar i velikost útvarů.
Termín *shodnost* označuje jednak zmíněný druh zobrazení v rovině, jednak binární relaci na množině rovinných útvarů ($U \cong V$).

Symbolika a termíny. Zobrazení $\mathcal{Z}$ v rovině ϱ je zobrazení $\mathcal{Z}\colon \varrho \to \varrho$, které každému *vzoru* (bodu) $A \in \varrho$ přiřazuje jeho *obraz* (bod) $\mathcal{Z}(A)$, který značíme A'. Píšeme $\mathcal{Z}\colon A \to A'$. Podobně pro každý rovinný útvar $U \subset \varrho$ značíme $U' = \{A'\colon A \in \in U\}$ obraz útvaru U a píšeme $\mathcal{Z}\colon U \to U'$. Samodružný bod A zobrazení ($A' = A$), samodružný útvar U zobrazení ($U' = U$).

Definice. Shodné zobrazení (nebo také shodnost) je zobrazení v rovině, při kterém obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ téže délky (tj. shodná úsečka).

Možná varianta definice. Shodné zobrazení by stačilo vymezit jen „vzdálenostně“, a to jako libovolnou *izometrii*: Pro každé dva různé body A, B a jejich obrazy A', B' platí $|AB| = |A'B'|$. Z toho už plyne, že obrazem každé úsečky je skutečně úsečka. (Důkaz.)

Vlastnosti shodných zobrazení.

(1) Triviální shodností je identické zobrazení: $X' = X$ pro každý bod X (zvané též *identita*). Každá shodnost $\mathcal{Z}$ je bijekce, inverzní zobrazení $\mathcal{Z}^{-1}$ je rovněž shodnost.
(2) Při shodném zobrazení je obrazem úsečky AB úsečka $A'B'$ téže délky, obrazem polopřímky AB polopřímka $A'B'$, obrazem poloroviny ABC polorovina $A'B'C'$, obrazem úhlu AVB úhel $A'V'B'$ téže velikosti, obrazem kružnice $k(S,r)$ kružnice $k'(S',r)$.
(3) Shodné zobrazení zachovává rovnoběžnost, tj. obrazem každých dvou přímek $p \parallel q$ jsou přímky $p' \parallel q'$.
(4) Každá shodnost je buď přímá, nebo nepřímá, tj. nemění, resp. mění orientaci každého úhlu.
(5) Složením dvou shodností vznikne opět shodnost.

Věta 1. Shodné zobrazení, které převádí dva dané body $A \neq B$ na dva dané body $A' \neq B'$, existuje, právě když úsečky AB a $A'B'$ mají stejné délky. Pokud tuto podmínku $|AB| = |A'B'|$ čtyři dané body splňují, pak existují právě dvě shodnosti, při kterých $A \to A'$ a $B \to B'$. Jedna z nich je přímá, druhá nepřímá shodnost. (Bez důkazu.)

Klasifikace shodných zobrazení.

Existuje pět druhů shodných zobrazení: čtyři z nich – *osové souměrnosti, středové souměrnosti, posunutí* a *otočení* – probíráme na střední škole, pátým druhem jsou *posunuté souměrnosti* (zvaná též *posunutá zrcadlení*). Každá posunutá souměrnost je výsledkem složení některé osové souměrnosti s posunutím ve směru příslušné osy souměrnosti.

Věta 2. Každé shodné zobrazení je výsledkem složení nejvýše tří osových souměrností. Složením dvou osových souměrností vznikne otočení nebo posunutí. Složením tři osových souměrností vznikne buď opět osová souměrnost, nebo posunutá souměrnost. (Bez důkazu.)

Příklad z učebnice. Jsou-li dány dva trojúhelníky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, pak tu jedinou shodnost, která převede $\triangle ABC$ na $\triangle A'B'C'$, sestrojíme složením nejvýše tří osových souměrností. První z nich zvolíme tak, aby obrazem bodu A byl bod A' (pokud to už rovnou neplatí), druhou osovou souměrnost pak vybereme tak, aby obrazem bodu B byl bod B' (pokud už to neplatí), a nakonec, pokud bod C' ještě není obrazem bodu C, uplatníme třetí osovou souměrnost (podle přímky $A'B'$).