

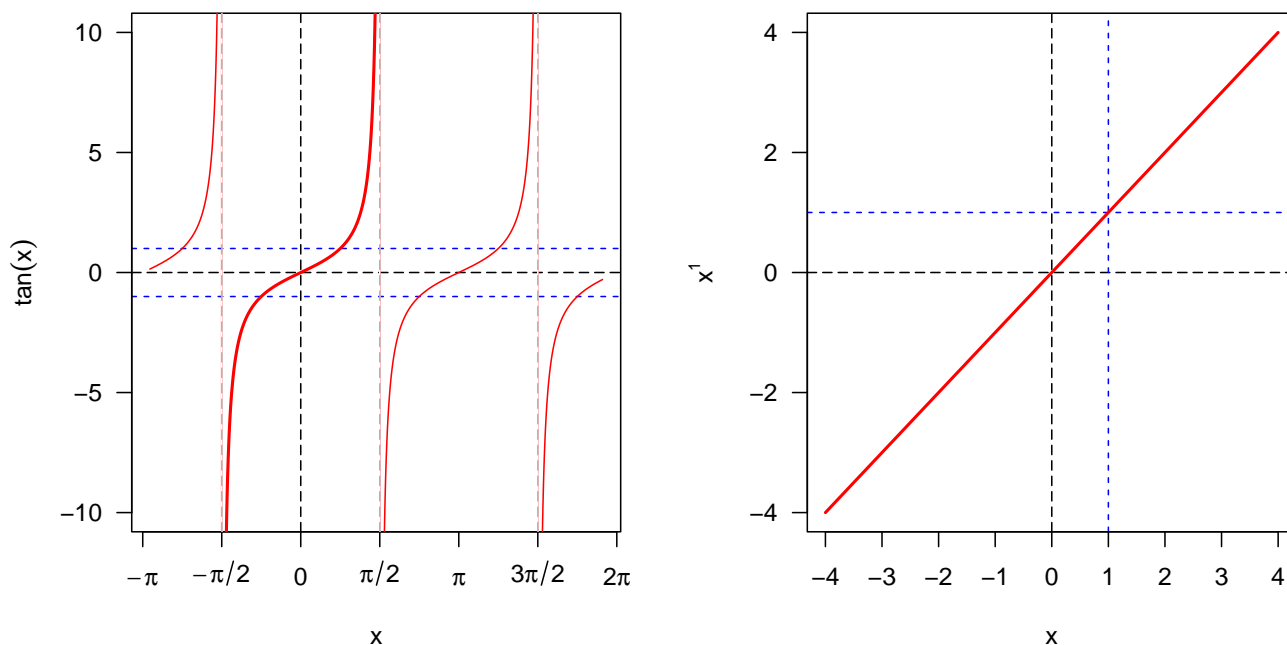
C1480: ÚVOD DO MATEMATIKY - SEMINÁŘ
TÉMA 2: LIMITY A DERIVACE

SKUPINA: A

VERONIKA HORSKÁ
PODZIMNÍ SEMESTR, 2022**2.1 Vlastnosti základních funkcí****Příklad 2.1. Základní vlastnosti funkce $\tan(x)$** Na obrázku 1 vlevo je zobrazený graf funkce $f(x) = \tan(x)$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

Obrázek 1: Graf funkce $\tan(x)$ (vlevo); graf funkce x^1 (vpravo)

Příklad 2.2. Základní vlastnosti funkce x^1

Na obrázku 1 vpravo je zobrazený graf funkce $f(x) = x^1$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

2.2 Výpočty limit**Příklad 2.3. Hornerovo schéma: Rozklad polynomu na kořenové činitele**

Rozložte na kořenové činitele následující polynomy

1. $a^2 + a - 2$ $(a - 1) \times (a + 2)$
2. $q^3 - 3q^2 - 6q + 8$ $(q - 1) \times (q + 2) \times (q - 4)$

Příklad 2.4. Limity funkcí ve vlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{u \rightarrow -3} u^2 + 3u + 2$ 2
2. $\lim_{r \rightarrow 2} \frac{3^r - 2^r}{5^r}$ $\frac{1}{5}$
3. $\lim_{d \rightarrow 1} \frac{4d^3 - d + 2}{d^4 - 6d^3 - 9d + 4}$ $-\frac{1}{2}$
4. $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}{s^2 - 4}$ $\frac{15}{4}$

Příklad 2.5. Limity funkcí v nevlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{p \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{p^2}$ 2
2. $\lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{2 + b^3 - b^4}{b^3 - 3b^5 - 2b^4 + 1}$ 0
3. $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2^j - 4^j}{5^j}$ 0
4. $\lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{4 + 2^k}{2 + 5^k}$ 2
5. $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{6a^7 - 5a^3 + 4a^4 - 1}{6 + a^2 - 3a^5 + 4a^7}$ $\frac{3}{2}$
6. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{8^y - 2^y}{4^y}$ ∞
7. $\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{3g^4 + 4g^8 - 3}{2g^6 - g^5 + 3g^4 - 5g}$ ∞
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 6^x}{6^x}$ -1

2.3 Výpočty derivací

Příklad 2.6. Derivace prvního řádu funkce

Vypočítejte následující derivace

- $(w^8 + w^{-8} + w^0 - \cos(w) + e^w)'$ $8w^7 - 8w^{-9} + 0 + \sin(w) + e^w$
- $(3t^5 - 2t^3 - 4t + 4)'$ $15t^4 - 6t^2 - 4$
- $(h^3 \sin(h) + 4c \tan(h))'$ $3h^2 \sin(h) + h^3 \cos(h) + 4 \tan(h) + \frac{4h}{\cos^2(h)}$
- $\left(\frac{\cos(z)}{\sin(z)}\right)'$ $\frac{-\sin(z) \sin(z) - \cos(z) \cos(z)}{\sin^2(z)} = \frac{-1}{\sin^2(z)}$
- $\left(\frac{c^2 - 3c + 2}{c - 2}\right)'$ 1
- $(\ln(2m^2 - 4m))'$ $\frac{2(m-1)}{m(m-2)}$
- $(\cos(n^2) + \sin(2n))'$ $-2n \sin(n^2) + 2 \cos(2n)$
- $(\tan(o) \cos(o) - 3 \ln(o) \cos(o))'$ $\frac{1 - \sin^2(o)}{\cos(o)} - \frac{3 \cos(o)}{o} + 3 \ln(o) \sin(o)$

Příklad 2.7. Derivace druhého řádu funkce

Vypočítejte následující druhé derivace

- $(2g^5 - g^3 - 4g + 4)''$ $40g^3 - 6g$
- $((l^4 - 1)e^l)''$ $(l^4 + 8l^3 + 12l^2 - 1)e^l$
- $(3e^d \sin(d))''$ $6e^d \cos(d)$
- $\left(\frac{ye^{4y} - 2}{2y}\right)''$ $8e^{4y} - \frac{2}{y^3}$

2.4 l'Hospitalovo pravidlo

Příklad 2.8. l'Hospitalovo pravidlo

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

- $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}{s^2 - 4}$ $\frac{15}{4}$
- $\lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^3 + 2u^2 + 5u - 6}{u^2 - 4}$ $l'Hospitalovo\ pravidlo\ nelze\ použít$
 $navíc\ \lim_{u \rightarrow 2^+} = \infty; \lim_{u \rightarrow 2^-} = -\infty \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 2} \text{neexistuje.}$
- $\lim_{v \rightarrow -2} \frac{3v^3 + 10v^2 + 9v + 2}{v^2 - 3v - 10}$ $-\frac{5}{7}$