

C1480: ÚVOD DO MATEMATIKY - SEMINÁŘ
TÉMA 2: LIMITY A DERIVACE

SKUPINA: B

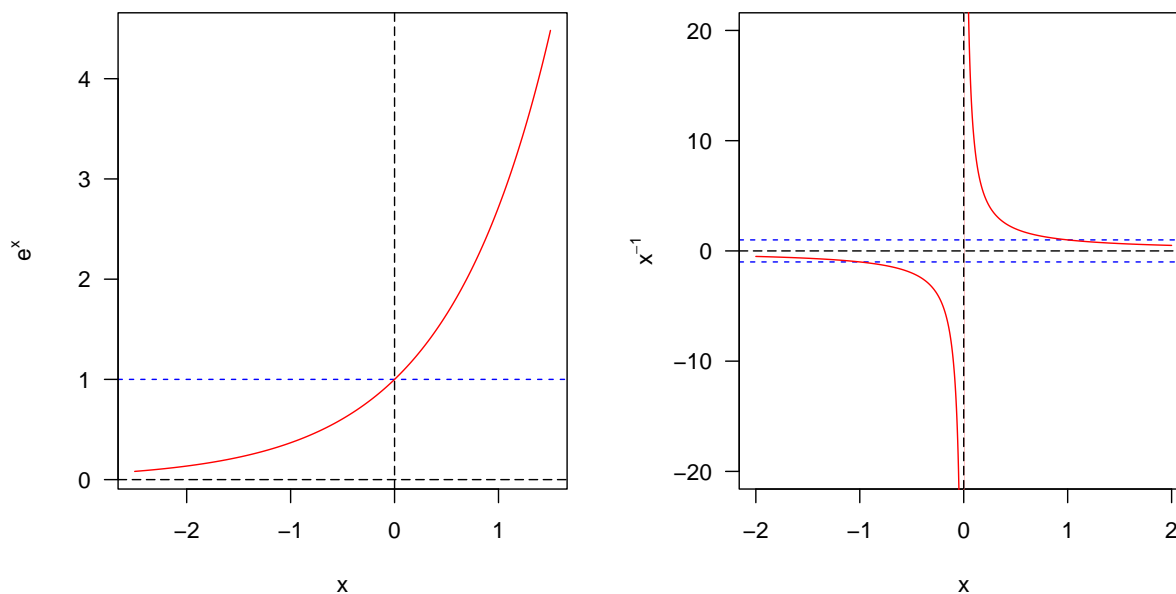
VERONIKA HORSKÁ
PODZIMNÍ SEMESTR, 2022

2.1 Vlastnosti základních funkcí

Příklad 2.1. Základní vlastnosti funkce e^x Na obrázku 1 vlevo je zobrazený graf funkce $f(x) = e^x$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

Obrázek 1: Graf funkce e^x (vlevo); graf funkce x^{-1} (vpravo)

Příklad 2.2. Základní vlastnosti funkce x^{-1}

Na obrázku 1 vpravo je zobrazený graf funkce $f(x) = x^{-1}$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

2.2 Výpočty limit**Příklad 2.3. Hornerovo schéma: Rozklad polynomu na kořenové činitele**

Rozložte na kořenové činitele následující polynomy

$$1. b^2 - 5b + 4 \qquad (b - 1) \times (b - 4)$$

$$2. r^3 - 7r - 6 \qquad (r + 1) \times (r + 2) \times (r - 3)$$

Příklad 2.4. Limity funkcí ve vlastním bodě

Vypočítejte následující limity

$$1. \lim_{m \rightarrow -2} \frac{m^3 - 3m^2 - 4m + 12}{m^5 - 2} \qquad 0$$

$$2. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^t - 6^t - 3^t}{2^t + 4^t} \qquad -\frac{1}{2}$$

$$3. \lim_{v \rightarrow 4} v^2 - 3v - 4 \qquad 0$$

$$4. \lim_{c \rightarrow -2} \frac{c^3 - c^2 - 4c + 4}{c^2 - 3c - 10} \qquad -\frac{12}{7}$$

Příklad 2.5. Limity funkcí v nevlastním bodě

Vypočítejte následující limity

$$1. \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{2}{f^2 + f} \qquad 0$$

$$2. \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{3^j + 5^j}{8^j} \qquad 0$$

$$3. \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{6a^5 - 2a^3 - 8a + 2}{3 + a^2 + 4a^4} \qquad -\infty$$

$$4. \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4^s} + 1}{\frac{1}{3^s} - 3} \qquad -\frac{1}{3}$$

$$5. \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{2p^6 - p^5 + 3p^4 - 5p}{3p^4 + 4p^8 - 3} \qquad 0$$

$$6. \lim_{l \rightarrow -\infty} \frac{2^l + 4^l}{5^l} \qquad \infty$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n} \qquad 1$$

$$8. \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{-4q^4 - q - 3}{q^3 - q + 9q^4 - 5} \qquad -\frac{4}{9}$$

2.3 Výpočty derivací

Příklad 2.6. Derivace prvního řádu funkce

Vypočítejte následující derivace

1. $(u^5 - 4u^4 - 5u^2 - u - 3)'$ $5u^4 - 16u^3 - 10u - 1$
2. $(\cos^4(g) + \tan(3g))'$ $-4 \sin(g) \cos^3(g) + \frac{3}{\cos^2(3g)}$
3. $\left(\frac{4 - \cos(y)}{e^y}\right)'$ $\frac{\sin(y) - 4 + \cos(y)}{e^y}$
4. $(e^d \sin(d) - 4 \ln(d) \cos(d))'$ $\sin(d)(e^d + 4 \ln(d)) + \cos(d)(e^d - \frac{4}{d})$
5. $\left(\frac{z^2 + z - 6}{z + 3}\right)'$ 1
6. $(k^7 - k^{-7} - k^0 - \ln(k) + \tan(k))'$ $7k^6 + 7k^{-8} - 0 - \frac{1}{k} + \frac{1}{\cos^2(k)}$
7. $((2 - x^2) \sin(x) - x^3 \cos(x))'$ $x \sin(x)(x^2 - 2) + 2 \cos(x)(1 - 2x^2)$
8. $\left(\frac{he^{4h} - 2}{2h}\right)'$ $2e^{4h} + \frac{1}{h^2}$

Příklad 2.7. Derivace druhého řádu funkce

Vypočítejte následující druhé derivace

1. $(\cos(w) \ln(w))''$ $-\frac{2w \sin(w) + \cos(w)(1 + w^2 \ln(w))}{w^2}$
2. $(i^5 - i^4 - 5i^2 + i - 3)''$ $2(10i^3 - 6i^2 - 5)$
3. $\left(\frac{\ln(m^2)}{m}\right)''$ $\frac{2(\ln(m^2) - 3)}{m^3}$
4. $(b \cos(b))''$ $-2 \sin(b) - b \cos(b)$

2.4 l'Hospitalovo pravidlo

Příklad 2.8. l'Hospitalovo pravidlo

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

1. $\lim_{c \rightarrow -2} \frac{c^3 - c^2 - 4c + 4}{c^2 - 3c - 10}$ $-\frac{12}{7}$
2. $\lim_{k \rightarrow -2} \frac{k^3 - k^2 + 4k + 4}{k^2 - 3k - 10}$ *l'Hospitalovo pravidlo nelze použít*
navíc $\lim_{k \rightarrow -2^+} = \infty; \lim_{k \rightarrow -2^-} = -\infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow -2}$ *neexistuje.*
3. $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{2s^3 - 3s^2 - 2s + 3}{5s^2 - 8s + 3}$ -1