Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

C1480: Úvod do matematiky - seminář

Téma 3: Průběh funkce 1/2 + 2/2

Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

Přehled pojmů

- **funkce** $f(x)$ ... něco, do čeho vložím (dosadím) číslo x a vypadne mi nové číslo y
- **definiční obor funkce** ... množina čísel x, které můžu vložit do funkce $f(x)$
- **obor hodnot funkce** ... množina čísel y, které mohou být výsledkem funkce $f(x)$

- **parita funkce** ... funkce může být sudá, lichá, nebo ani jedno
    - **sudá funkce** ... funkce symetrická podle osy y, tj. $f(-x) = f(x)$
    - **lichá funkce** ... funkce souměrná podle počátku, tj. $f(-x) = -f(x)$

- **periodická funkce** ... pokud lze funkci $f(x)$ vnímat jako jeden opakující se úsek, pak je funkce $f(x)$ periodická. Délka tohoto úseku je **perioda**.

- **spojitost funkce** ... když dokáži funkci $f(x)$ zakreslit pomocí jedné čáry bez přerušení, tak je spojitá
- **bod nespojitosti** ... bod, ve kterém funkce není spojitá
- **nulový bod** ... bod x, ve kterém je funkce $f(x)$ nulová, tj. $f(x) = 0$
- **kladná funkce** ... funkce $f(x)$ je na intervalu I kladná, pokud jsou její hodnoty na intervalu I větší než nula, tj. $f(x) > 0$
- **záporná funkce** ... funkce $f(x)$ je na intervalu I záporná, pokud jsou její hodnoty na intervalu I menší než nula, tj. $f(x) < 0$

- **monotónnost funkce**
  - **rostoucí funkce** . . . funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu roste
  - **neklesající funkce** . . . funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu roste nebo stagnuje
  - **klesající funkce** . . . funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu klesá
  - **nerostoucí funkce** . . . funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu klesá nebo stagnuje

- **lokální extrém funkce** . . . máme dva typy lokálních extrémů
  - **lokální maximum** . . . hodnota, která má ve svém okolí pouze nižší hodnoty, než je ona sama (vrchol kopce)
  - **lokální minimum** . . . hodnota, která má ve svém okolí vyšší hodnoty, než je ona sama (dno ďolíku)

- **konvexní funkce** . . . funkce je na intervalu I konvexní, pokud její průběh na intervalu I kopíruje tvar šálku (hrníčku), tj. $\cup$;
- **konkávní funkce** . . . funkce je na intervalu I konkávní, pokud její průběh na intervalu I kopíruje tvar kopce, tj. $\cap$;
  - *Mnemotechnická pomůcka:* **Do konkávy kávu nenaliješ!** (reference, že konkávní tvar není tvar šálku, a nelze tedy do něj nalít kávu).

- **inflexní bod** . . . bod, ve kterém se průběh funkce mění z konvexního na konkávní, nebo naopak z konkávního na konvexní

- **směrnice přímky** ... přímka má tvar $ax + b$, kde a je **směrnice** a b je **absolutní člen**. Směrnice je tedy parametr a určující sklon přímky

- **asymptota** ... přímka, ke které směřuje funkce, když jde buď do $\pm$ nekonečna, nebo když se blíží k bodům nespojitosti (*Poznámka: Asymptota může ale nemusí existovat!!!*)
    - **asymptota bez směrnice** ... přímka, k níž směřuje funkce, když se blíží k bodům nespojitosti. Takováto přímka je vždy rovnoběžná s osou y a nemá tedy směrnici a

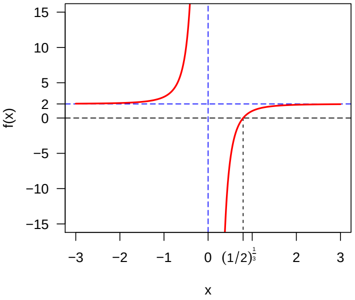
    - **asymptota se směrnicí** ... přímka, k níž směřuje funkce, když jde do $+$nekonečna nebo $-$nekonečna. Tato přímka má tvar $y = ax + b$, kde a (směrnice) je nějaké konkrétní číslo (není $+\infty$, ani $-\infty$)

Příklad 3.1. Vyšetření průběhu funkce

Na základě grafu vyšetřete průběh funkce $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + 2$. Postupně stanovte

1.

a. definiční obor $D(f)$ + obor hodnot $H(f)$



b. paritu funkce $f(x)$ (sudá / lichá / ani jedno)

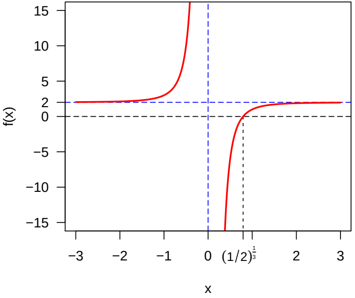
c. periodicitu funkce $f(x)$

d. nulové body + body nespojitosti funkce $f(x)$ +

d1. intervaly, na kterých je funkce kladná

d2. intervaly, na kterých je funkce záporná

2. lokální extrémy funkce $f(x)$ +



a. intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ rostoucí

b. intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ klesající

3. inflexní body funkce $f(x)$ +

a. intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ konvexní

b. intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ konkávní

4. asymptoty funkce $f(x)$

a. asymptotu bez směrnice

b. asymptotu se směrnicí

Příklad 3.2. Vyšetření průběhu funkce

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1} - 3$. Postupně stanovte

1.
   a. definiční obor $D(f)$ funkce $f(x)$

   b. paritu funkce $f(x)$ (sudá / lichá / ani jedno)

   c. periodicitu funkce $f(x)$

   d. nulové body + body nespojitosti funkce $f(x)$ +
      d1. intervaly, na kterých je funkce kladná
      d2. intervaly, na kterých je funkce záporná

2. lokální extrémy funkce $f(x)$ $+$

a. intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ rostoucí

b. intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ klesající

3. inflexní body funkce $f(x)$ $+$

a. intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ konvexní

b. intervaly, na kterých je funkce $f(x)$ konkávní

4. asymptoty funkce $f(x)$
   a. asymptotu bez směrnice
   b. asymptotu se směrnicí

5.
   a. funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body).

b. Závěrem vykreslete graf funkce $f(x)$ a na základě grafu stanovte obor hodnot $H(f)$.

Výsledky:

1. a. $D(f) = \mathbb{R}$
   b. parita: sudá
   c. periodicita: neperiodická
   d. $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; BN: nemá
      d1. $\ominus \; -\frac{\sqrt{3}}{3} \; \oplus \; \frac{\sqrt{3}}{3} \; \ominus$
2. lokální extrémy: $\oplus\, 0 \ominus$
3. inflexní body: $\oplus \; -\frac{\sqrt{3}}{3} \; \ominus \; \frac{\sqrt{3}}{3} \; \oplus$
4. ABS: nemá; ASS: $y = -3$
5. $f(0) = 1$; $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$; $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$

Příklad 3.3. Vyšetření průběhu funkce

Vyšetřete průběh funkce $f(t) = \frac{t^2-2}{2t}$. Postupně stanovte

1.

a. definiční obor $D(f)$ funkce $f(t)$

b. paritu funkce $f(t)$ (sudá / lichá / ani jedno)

c. periodicitu funkce $f(t)$

d. nulové body + body nespojitosti funkce $f(t)$ +

d1. intervaly, na kterých je funkce kladná

d2. intervaly, na kterých je funkce záporná

2. lokální extrémy funkce $f(t)$ +

   a. intervaly, na kterých je funkce $f(t)$ rostoucí

   b. intervaly, na kterých je funkce $f(t)$ klesající

3. inflexní body funkce $f(t)$ +

   a. intervaly, na kterých je funkce $f(t)$ konvexní

   b. intervaly, na kterých je funkce $f(t)$ konkávní

4. asymptoty funkce $f(t)$
   a. asymptotu bez směrnice
   b. asymptotu se směrnicí

5.
   a. funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body).

b. Závěrem vykreslete graf funkce $f(x)$ a na základě grafu stanovte obor hodnot $H(f)$.

Výsledky:

1. a. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   b. parita: lichá
   c. periodicita: neperiodická
   d. $t = \pm\sqrt{2}$; BN: $t = 0$
      d1. $\ominus\ -\sqrt{2}\ \oplus\ 0\ \ominus\ \sqrt{2}\ \oplus$
2. lokální extrémy: $\oplus\, 0\, \oplus$
3. inflexní body: $\oplus\, 0\, \ominus$
4. ABS: $t = 0$; ASS: $y = \frac{1}{2}t$
5. nemá