C1480: Úvod do matematiky - seminář
Téma 3: Průběh funkce

Teorie

Veronika Horská
podzimní semestr, 2022

3 Průběh funkce - Přehled pojmů

3.1 Základní vlastnosti funkcí

- **funkce** $f(x)$ … něco, do čeho vložím (dosadím) číslo x a vypadne mi nové číslo y
- **definiční obor funkce** $f(x)$ … množina čísel x, které můžu vložit do funkce $f(x)$
- **obor funkce** … množina čísel y, které mi mohou vyjít jako výsledek funkce $f(x)$
- **parita funkce** … funkce může být buď sudá nebo lichá
  - **sudá funkce** … funkce symetrická podle osy y, tj. $f(-x) = f(x)$
  - **lichá funkce** … funkce symetrická podle počátku, tj. $f(-x) = -f(x)$
- **periodická funkce** … pokud lze funkci $f(x)$ vnímat jako jeden úsek, který se neustále opakuje, pak je funkce $f(x)$ periodická. Délka jednoho úseku se nazývá **perioda**.
- **spojitost funkce** … když dokážu funkci $f(x)$ zakreslit pomocí jedné čáry bez přerušení, tak je spojitá
- **bod nespojitosti** … bod, ve kterém funkce není spojitá
- **nulový bod** … bod x, ve kterém je funkce $f(x)$ nulová, tj. $f(x) = 0$
- **kladná funkce** … funkce $f(x)$ je na intervalu I kladná, pokud jsou její hodnoty na intervalu I větší než nula, tj. $f(x) > 0$
- **záporná funkce** … funkce $f(x)$ je na intervalu I záporná, pokud jsou její hodnoty na intervalu I menší než nula, tj. $f(x) < 0$
- **monotónnost funkce**
  - **rostoucí funkce** … funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu roste
  - **neklesající funkce** … funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu roste nebo stagnuje
  - **klesající funkce** … funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu klesá
  - **nerostoucí funkce** … funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu klesá nebo stagnuje
- **lokální extrém funkce** … máme dva typy lokálních extrémů
  - **lokální maximum** … hodnota, která má ve svém okolí pouze nižší hodnoty, než je ona sama (můžeme si to představit jako vrchol kopce)
  - **lokální minimum** … hodnota, která má ve svém okolí vyšší hodnoty, než je ona sama (můžeme si to představit, jako dno ďolíku)
- **konvexní funkce** … funkce je na intervalu I konvexní, pokud její průběh na intervalu I kopíruje tvar šálku (hrníčku), tj. $\cup$;
  - funkce je **konvexní** na intervalu I, pokud je její druhá derivace na intervalu I **kladná**
  - *Mnemotechnická pomůcka:* kladná derivace má znaménko +; představujte si, že znaménko + symbolizuje kostkový cukr, který chci hodit do šálku.

- **konkávní funkce** ... funkce je na intervalu I konkávní, pokud její průběh na intervalu I kopíruje tvar kopce, tj. $\cap$;
  - *Mnemotechnická pomůcka:* **Do konkávy kávu nenaliješ!** (reference, že konkávní tvar není tvar šálku, a nelze tedy do něj nalít kávu).
  - funkce je **konkávní** na intervalu I, pokud je její druhá derivace na intervalu I **záporná**
- **inflexní bod** ... bod, ve kterém se průběh funkce mění z konvexního na konkávní, nebo naopak z konkávního na konvexní
- **směrnice přímky** ... přímka má tvar $ax + b$, kde a je **směrnice** a b je **absolutní člen**. Směrnice je tedy parametr a určující sklon přímky
- **asymptota** ... přímka, ke které směřuje funkce, když jde buď do $\pm$ nekonečna, nebo když se blíží k bodům nespojitosti (*Poznámka: Asymptota může ale nemusím existovat!!!*)
  - **asymptota bez směrnice** ... přímka, k níž směřuje funkce, když se blíží k bodům nespojitosti. Takováto přímka je vždy rovnoběžná s osou y a nemá tedy směrnici a
  - **asymptota se směrnicí** ... přímka, k níž směřuje funkce, když jde do +nekonečna nebo −nekonečna. tato přímka má tvar $y = ax + b$, kde a (směrnice) je nějaké konkrétní číslo (není $+\infty$, ani $-\infty$)

3.2 Limity funkcí

- + Zopakování postupů **výpočtů limit** z cvičení č. 2 (výpočty limit budeme v tématu 3 hojně využívat).

3.3 Derivace funkcí

- + Zopakování postupů **výpočtů derivací** z cvičení č. 2 (výpočty prvních a druhých derivací budeme v tématu 3 hojně využívat).
- **Připomínka stěžejních pravidel pro určení derivací**
  - derivace součtu = součet derivací ... $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
  - derivace součinu dvou funkcí = první derivovaná × druhá nederivovaná + první nederinovovaná × druhá derivovaná ... $(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$
  - derivace podílu dvou funkcí = (první derivovaná × druhá nederivovaná − první nederinovovaná × druhá derivovaná) / druhá funkce na druhou ... $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$