Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

C1480: Úvod do matematiky - seminář

Téma 6: Diferenciální rovnice

Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

Přehled pojmů

- **obyčejná diferenciální rovnice (ODR)**
  - rovnice, v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace
- **obyčejná diferenciální rovnice 1 řádu** ... $y' = f(x, y)$
  - rovnice, v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace nejvýše prvího řádu
  - úkol: najděte tvar funkce y tak, aby platila rovnost $y' = f(x, y)$
- **obecné řešení ODR**
  - množina všech funkcí y, které splňují rovnost $y' = f(x, y)$; řešení y se vzájemně liší pouze v konstantě
- **počáteční podmínka** ... $y(x_0) = y_0$, kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$
  - podmínka, která může (ale nemusí) být zadaná společně se zadáním diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$
  - ze všech obecných řešení určuje jedno konkrétní tzv. **partikulární řešení ODR**
- **integrální křivka ODR**
  - křivka znázorňující určité řešení ODR

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

- Existuje mnoho typů ODR 1. řádu: **rovnice se separovanými proměnnými**, homogenní diferenciální rovnice, lineární diferenciální rovnice, exaktní diferenciální rovnice, ...

Rovnice se separovanými proměnnými

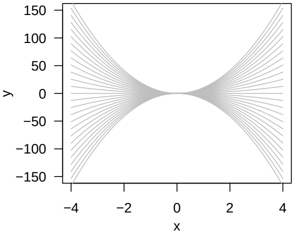
- rovnice, ve kterých je možné od sebe oddělit (separovat) složku proměnné x (na jednu stranu rovnice) a složku proměnné y (na druhou stranu rovnice)
- $f(x) + g(y)y' = 0$

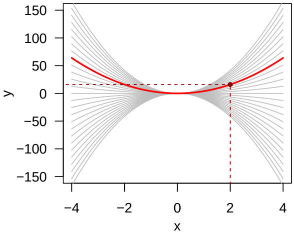
Postup nalezení obecného řešení ODR se separovanými proměnnými

- Zadání: Najděte řešení rovnice $f(x) + g(y)y' = 0$.
- Řešení:
  1. vyjdeme ze zadání $f(x) + g(y)y' = 0$
  2. y' nahradíme podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx} \to f(x) + g(y)\frac{dy}{dx} = 0$
  3. **proces separace** ... všechny výrazy proměnné y převedeme na levou stranu rovnice, všechny výrazy proměnné x převedeme na pravou stranu $\to g(y)dy = -f(x)dx$
  4. obě strany rovnice integrujeme $\to \int g(y)dy = \int -f(x)dx \to G(y) = F(x) + C$, kde C je konstanta
  5. vztah $G(y) = F(x) + C$ upravujeme tak dlouho, dokud nám na levé straně nezůstane pouze proměnná y, tj. $y = \mathcal{F}(x) + C$
  6. prověříme, že výsledná množina řešení je kompletní + doplnění chybějících řešení
  7. získáme **obecné řešení** $y = \mathcal{F}(x) + C$, $x \in \dots$, $C \in \dots$

Postup nalezení partikulárního řešení ODR se separovanými proměnnými

- Zadání: Najděte řešení rovnice $f(x) + g(y)y' = 0, \quad y(x_0) = y_0$.
- Řešení:
    6. provedením kroků 1–6 najdeme tvar obecného řešení rovnice $f(x) + g(y)y' = 0$, tj. $y = \mathcal{F}(x) + C$
    7. do obecného řešení dosadíme za x hodnotu x_0 a za y hodnotu y_0
    8. ze vztahu $y_0 = \mathcal{F}(x_0) + C$ dopočítáme hodnotu C (nyní konkrétní číslo $\mathcal{C}$)
    9. $\mathcal{C}$ dosadíme do obecného řešení $y = \mathcal{F}(x) + C \to$ získáme **partikulární řešení** $y = \mathcal{F}(x) + \mathcal{C}$, $x \in \ldots$



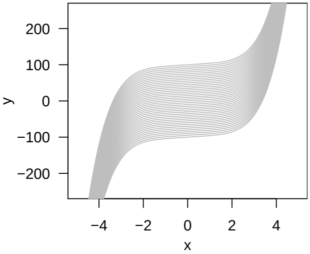


Obrázek: (a) obecné řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x}$ (vlevo); (b) partikulární řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x}$, $y(2) = 16$ (vpravo)

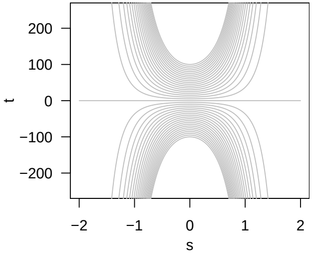
Příklad 6.1. Rovnice se separovanými proměnnými

Vyřešte následující rovnice

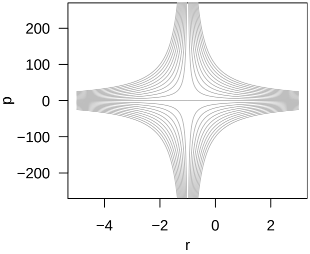
1. $y' = x^4 + 4$



2. $\frac{t'}{t} = 4s$

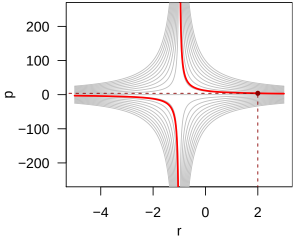


3. $(r+1)p' = -p$



Příklad 6.2. Partikulární řešení rovnic se separovanými proměnnými
Určete partikulární řešení následujících rovnic pro uvedenou počáteční podmínku.

1. $(r+1)p' = -p$, $p(2) = 4$



2. $(r+1)p' = -p$, $p(-1) = 2$