

MUNI

Touha po nekonečnu: Množiny

CORE004 Matematika jako součást kultury

Zdeněk Pospíšil

707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

30. listopadu 2023

Obsah

Nekonečno

Nekonečno filosofů

Nekonečno theologů

Důvody proti existenci aktuálního nekonečna

Důvody pro existenci aktuálního nekonečna

Klasifikace nekonečten

Nekonečno matematiků

Galilei: nekonečno je sporné

Bolzano: nekonečno je paradoxní

Cantor: nekonečno je

Množiny

Klasická teorie množin

Nová infinitní matematika

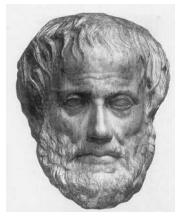
Ποίησις

Perspektiva

Horizont

Jevy a jejich seskupení

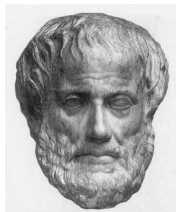
Aristotelés: Odmítnutí nekonečna



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἀπειρον nemůže být ἀρχή

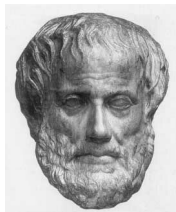


Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἄπειρον nemůže být ἀρχή

Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.



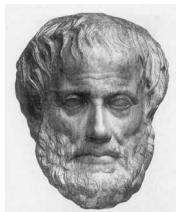
Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἄπειρον nemůže být ἀρχή

Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.

...neboť matematikové nemají zapotřebí APEIRA ve skutečnosti a neužívají ho. Jen jim dostačuje, že neomezená čára jest dostatečně dlouhá.



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

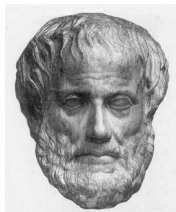
Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἀπειρον nemůže být ἀρχή

Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.

...neboť matematikové nemají zapotřebí APEIRA ve skutečnosti a neužívají ho. Jen jim dostačuje, že neomezená čára jest dostatečně dlouhá.

Zbývá tedy, že APEIRON je jen v možnosti.



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

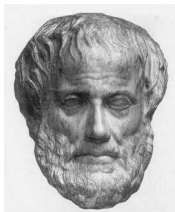
Ἄπειρον nemůže být ἀρχή

Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.

...neboť matematikové nemají zapotřebí APEIRA ve skutečnosti a neužívají ho. Jen jim dostačuje, že neomezená čára jest dostatečně dlouhá.

Zbývá tedy, že APEIRON je jen v možnosti.

Prodlužování úsečky (nekonečno prostorové):



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἀπειρον nemůže být ἀρχή

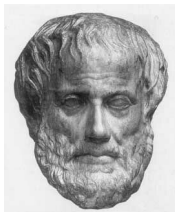
Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.

...neboť matematikové nemají zapotřebí APEIRA ve skutečnosti a neužívají ho. Jen jim dostačuje, že neomezená čára jest dostatečně dlouhá.

Zbývá tedy, že APEIRON je jen v možnosti.

Prodlužování úsečky (nekonečno prostorové):

1. Narazí na hranici.



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἀπειρον nemůže být ἀρχή

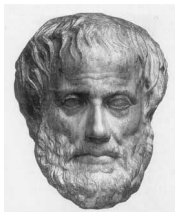
Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.

...neboť matematikové nemají zapotřebí APEIRA ve skutečnosti a neužívají ho. Jen jim dostačuje, že neomezená čára jest dostatečně dlouhá.

Zbývá tedy, že APEIRON je jen v možnosti.

Prodlužování úsečky (nekonečno prostorové):

1. Narazí na hranici.
2. Rozplyne se v neurčitu (nekonečno jako neurčitost).



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἀπειρον nemůže být ἀρχή

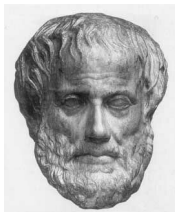
Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.

...neboť matematikové nemají zapotřebí APEIRA ve skutečnosti a neužívají ho. Jen jim dostačuje, že neomezená čára jest dostatečně dlouhá.

Zbývá tedy, že APEIRON je jen v možnosti.

Prodlužování úsečky (nekonečno prostorové):

1. Narazí na hranici.
2. Rozplyne se v neurčitu (nekonečno jako neurčitost).
3. Vrátí se tam, kde byla (bludné nekonečno).



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἀπειρόν nemůže být ἀρχή

Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.

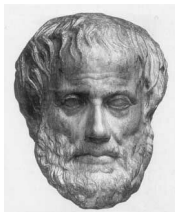
...neboť matematikové nemají zapotřebí APEIRA ve skutečnosti a neužívají ho. Jen jim dostačuje, že neomezená čára jest dostatečně dlouhá.

Zbývá tedy, že APEIRON je jen v možnosti.

Prodlužování úsečky (nekonečno prostorové):

1. Narazí na hranici.
2. Rozplyne se v neurčitu (nekonečno jako neurčitost).
3. Vráti se tam, kde byla (bludné nekonečno).

Pokračování výpočtu, algoritmu (nekonečno časové):



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἀπειρόν nemůže být ἀρχή

Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.

...neboť matematikové nemají zapotřebí APEIRA ve skutečnosti a neužívají ho. Jen jim dostačuje, že neomezená čára jest dostatečně dlouhá.

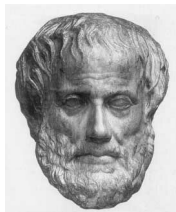
Zbývá tedy, že APEIRON je jen v možnosti.

Prodlužování úsečky (nekonečno prostorové):

1. Narazí na hranici.
2. Rozplyne se v neurčitu (nekonečno jako neurčitost).
3. Vráti se tam, kde byla (bludné nekonečno).

Pokračování výpočtu, algoritmu (nekonečno časové):

- Dospěje k výsledku.



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Aristotelés: Odmítnutí nekonečna

Ἀπειρόν nemůže být ἀρχή

Je nemožné, že by APEIRON bylo odloučené od smyslových věcí a bylo jakýmsi APEIREM samým o sobě.

...neboť matematikové nemají zapotřebí APEIRA ve skutečnosti a neužívají ho. Jen jim dostačuje, že neomezená čára jest dostatečně dlouhá.

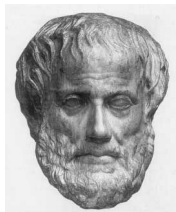
Zbývá tedy, že APEIRON je jen v možnosti.

Prodlužování úsečky (nekonečno prostorové):

1. Narazí na hranici.
2. Rozplyne se v neurčitu (nekonečno jako neurčitost).
3. Vrátí se tam, kde byla (bludné nekonečno).

Pokračování výpočtu, algoritmu (nekonečno časové):

- Dospěje k výsledku (ale nevíme, kdy).



Aristotelés ze Stageiry
384–322 BCE

Novověké komentáře



1724–1804

Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*:
První rozpor transcendentálních idejí:

- A 426/B 454 Svět má počátek v čase a také v prostorovém ohledu je nekonečný.
- A 426/B 455 Svět je bez počátku a nemá v prostoru žádné hranice, nýbrž je tak s ohledem na čas, tak s ohledem na prostor nekonečný.

G. W. F. Hegel, *Wißenschaft der Logik I*, kap. 2 C:

Kvantum se proměňuje a stává se jiným kvantem; další určení této proměny, její směřování do nekonečna, spočívá v tom, že je kvantum pojato jako v sobě samém sporné. – Kvantum se stává jiným, avšak do své jinakosti plynule přechází; i toto jiné je tudíž kvantem. Je jiné nejen vzhledem k určitému kvantu, ale vzhledem ke kvantu vůbec, představuje sebe samého jakožto omezeného, je svou omezeností, svým nekonečnem.



1770–1831

Theologické důvody proti existenci aktuálního nekonečna

Aktuální nekonečno se může týkat pouze Boha.
Svět není nekonečný ani v prostoru, ani v čase.



Tomáš Aquinský
1225–1274

Theologické důvody proti existenci aktuálního nekonečna

Aktuální nekonečno se může týkat pouze Boha.
Svět není nekonečný ani v prostoru, ani v čase.



Tomáš Aquinský
1225–1274



Dante Alighieri
1265–1321

Božská komedie, 33,121-126:

*Ne, nemám slov, ba ani sil to chápat
a netroufám si vyložit to blíž,
s tím „nic“, co vím, zde musím jenom tápat.*

*Ó věčné světlo, které v sobě tkvíš,
jen ty si s láskou hledíš do ohniska,
jen ty se znáš a sebe vysvětlíš.*

Theologické důvody proti existenci aktuálního nekonečna



Dante Alighieri
1265–1321

Božská komedie, 33,121-126:

*Ne, nemám slov, ba ani sil to chápat
a netroufám si vyložit to blíž,
s tím „nic“, co vím, zde musím jenom tápat.*

*Ó věčné světlo, které v sobě tkvíš,
jen ty si s láskou hledíš do ohniska,
jen ty se znáš a sebe vysvětlíš.*



Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

I buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

I buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!



Mikuláš Kusánský
1401–1462

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

I buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!

De docta ignorantia: ... o pravdě nevíme nic jiného, než že víme, že přesně tak jak jest, je neuchopitelná – a všichni filosofové ji hledají, ale žádný ji nenašel tak jak jest; a čím poučenější budeme o této nevědomosti, tím blíž se přibližujeme k samotné pravdě.



Mikuláš Kusánský
1401–1462

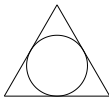
Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

I buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!



Mikuláš Kusánský
1401–1462

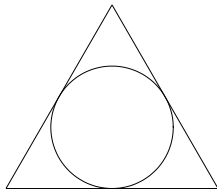
Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



I buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!

Aurelius Augustin
354–430



Mikuláš Kusánský
1401–1462

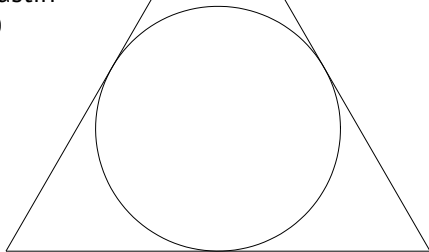
Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

I buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!



Mikuláš Kusánský
1401–1462

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

! buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!



Mikuláš Kusánský
1401–1462

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

I buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!



Mikuláš Kusánský
1401–1462

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

I buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!



Mikuláš Kusánský
1401–1462

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

I buď vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!



Mikuláš Kusánský
1401–1462

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna



Aurelius Augustin
354–430

I bud' vzdálena od nás všeliká pochybnost, že by Bohu všechny počty neměly známy býti ... I když jsme my nebožátka, jenžto opovažujeme se meze klásti vševědoucnosti jeho ...

Bohu musí být známy všechny počty, o nichž víme jistotně, že jim konce není ... Ti, kdo o Boží schopnosti pochybují, se řítí do nejhlubší propasti bezbožnosti!

Není žádná úměrnost mezi nekonečným a konečným.



Mikuláš Kusánský
1401–1462

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna

Není žádná úměrnost mezi nekonečným a konečným.



Giordano Bruno
1548–1600



Mikuláš Kusánský
1401–1462

Theologické důvody pro existenci aktuálního nekonečna

Není žádná úměrnost mezi nekonečným a konečným.



Mikuláš Kusánský
1401–1462



Giordano Bruno
1548–1600

...je rozmnožena znamenitost Boží a zjevena velikost Jeho říše. Není oslavován jedním, nýbrž nespočetnými slunci, nikoliv jednou zemí a jedním světem, ale tisícem tisíců, co pravím, nekonečností světů.

Rodrigo (Roderico) de Arriaga

Od roku 1625 pracoval v Praze.



1592–1667

Rodrigo (Roderico) de Arriaga

Od roku 1625 pracoval v Praze.

Uznával aktuální nekonečno.



1592–1667

Rodrigo (Roderico) de Arriaga

Od roku 1625 pracoval v Praze.

Uznával aktuální nekonečno.

1. nekonečno co do počtu



1592–1667

Rodrigo (Roderico) de Arriaga

Od roku 1625 pracoval v Praze.

Uznával aktuální nekonečno.

1. nekonečno co do počtu
2. nekonečno co do rozlehlosti (délka, obsah, objem)



1592–1667

Rodrigo (Roderico) de Arriaga

Od roku 1625 pracoval v Praze.

Uznával aktuální nekonečno.

1. nekonečno co do počtu
2. nekonečno co do rozlehlosti (délka, obsah, objem)
3. nekonečno co do intenzity (síla, rychlost, láska)



1592–1667

Rodrigo (Roderico) de Arriaga

Od roku 1625 pracoval v Praze.

Uznával aktuální nekonečno.

1. nekonečno co do počtu
2. nekonečno co do rozlehlosti (délka, obsah, objem)
3. nekonečno co do intenzity (síla, rychlost, láska)
4. nekonečno co do dokonalosti



1592–1667

Rodrigo (Roderico) de Arriaga

Od roku 1625 pracoval v Praze.

Uznával aktuální nekonečno.

1. nekonečno co do počtu
2. nekonečno co do rozlehlosti (délka, obsah, objem)
3. nekonečno co do intenzity (síla, rychlost, láska)
4. nekonečno co do dokonalosti (přesnost)



1592–1667

Rodrigo (Roderico) de Arriaga

Od roku 1625 pracoval v Praze.

Uznával aktuální nekonečno.

1. nekonečno co do počtu
2. nekonečno co do rozlehlosti (délka, obsah, objem)
3. nekonečno co do intenzity (síla, rychlost, láska)
4. nekonečno co do dokonalosti (přesnost)
5. Bůh



1592–1667

Rodrigo (Roderico) de Arriaga

Od roku 1625 pracoval v Praze.

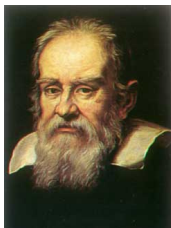
Uznával aktuální nekonečno.

1. nekonečno co do počtu
2. nekonečno co do rozlehlosti (délka, obsah, objem)
3. nekonečno co do intenzity (síla, rychlost, láska)
4. nekonečno co do dokonalosti (přesnost)
5. Bůh (nekonečný svým vlastním způsobem)



1592–1667

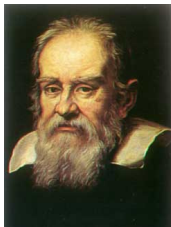
Galileo Galilei: nekonečno je sporné



1564–1642

Galileo Galilei: nekonečno je sporné

Předpoklad: Všechna přirozená čísla existují.



1564–1642

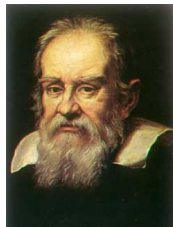
Galileo Galilei: nekonečno je sporné

Předpoklad: Všechna přirozená čísla existují.

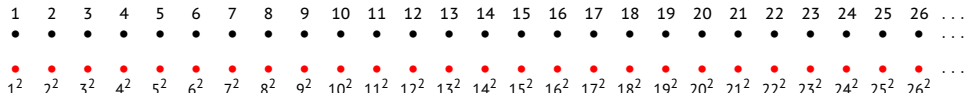
Axiom: Celek je větší než část

Závěr:

Počet čtvercových čísel je menší, než všech přirozených.



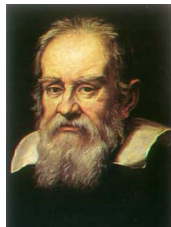
1564–1642



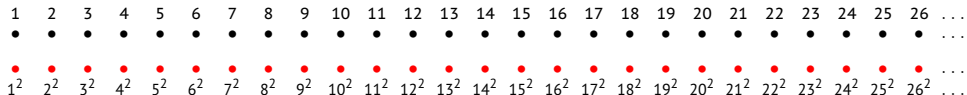
Galileo Galilei: nekonečno je sporné

Předpoklad: Všechna přirozená čísla existují.

Axiom: Co se kryje, rovno jest.



1564–1642



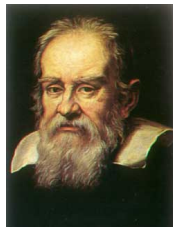
Galileo Galilei: nekonečno je sporné

Předpoklad: Všechna přirozená čísla existují.

Axiom: Co se kryje, rovno jest.

Závěr:

Počet čtvercových čísel je stejný, jako všech přirozených.



1564–1642



Galileo Galilei: nekonečno je sporné

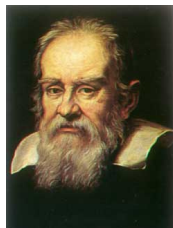
Předpoklad: Všechna přirozená čísla existují.

Axiom: Celek je větší než část

Axiom: Co se kryje, rovno jest.

Závěr:

Spor!



1564–1642



...ale potřebujeme ho

Podkladem světa jsou (přirozená) čísla

...ale potřebujeme ho

Podkladem světa jsou (přirozená) čísla

Poměr délek úhlopříčky a strany čtverce nelze najít konečným postupem.

...ale potřebujeme ho

Podkladem světa jsou (přirozená) čísla

Poměr délek úhlopříčky a strany čtverce nelze najít konečným postupem.

Popis pohybu a změny:

$$x + dx = x, \quad y + dy = y, \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

...ale potřebujeme ho

Podkladem světa jsou (přirozená) čísla

Poměr délek úhlopříčky a strany čtverce nelze najít konečným postupem.

Popis pohybu a změny:

$$x + dx = x, \quad y + dy = y, \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

Diferenciály nejsou dobře definované.

...ale potřebujeme ho

Podkladem světa jsou (přirozená) čísla

Poměr délek úhlopříčky a strany čtverce nelze najít konečným postupem.

Popis pohybu a změny:

$$x + dx = x, \quad y + dy = y, \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

Diferenciály nejsou dobře definované.

Algebraizace infinitesimálního počtu:

$$(\forall x_0)(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

...ale potřebujeme ho

Podkladem světa jsou (přirozená) čísla

Poměr délek úhlopříčky a strany čtverce nelze najít konečným postupem.

Popis pohybu a změny:

$$x + dx = x, \quad y + dy = y, \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

Diferenciály nejsou dobře definované.

Algebraizace infinitesimálního počtu:

$$(\forall x_0)(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Obecný kvantifikátor je aktuálně nekonečnou konjunkcí výroků.

Bernard Bolano: Nekonečno je paradoxní



1781–1848

Bernard Bolano: Nekonečno je paradoxní

- Existuje aspoň jedna pravdivá věta. (*ParUn.* § 13)



1781–1848

Bernard Bolano: Nekonečno je paradoxní

- Existuje aspoň jedna pravdivá věta. (*ParUn.* § 13)
Důsledek: Existuje neomezeně mnoho pravdivých vět.



1781–1848

Bernard Bolano: Nekonečno je paradoxní

- Existuje aspoň jedna pravdivá věta. (*ParUn.* § 13)
Důsledek: Existuje neomezeně mnoho pravdivých vět.
- Bůh je vševědoucí. (*ParUn.* § 11)



1781–1848

Bernard Bolano: Nekonečno je paradoxní

- Existuje aspoň jedna pravdivá věta. (*ParUn.* § 13)
Důsledek: Existuje neomezeně mnoho pravdivých vět.
- Bůh je vševědoucí. (*ParUn.* § 11)
Důsledek: V boží mysli jsou všechny pravdivé věty.



1781–1848

Bernard Bolano: Nekonečno je paradoxní

- Existuje aspoň jedna pravdivá věta. (*ParUn.* § 13)
Důsledek: Existuje neomezeně mnoho pravdivých vět.
- Bůh je vševědoucí. (*ParUn.* § 11)
Důsledek: V boží mysli jsou všechny pravdivé věty.
- Závěr: Nekonečné množství existuje.



1781–1848

Bernard Bolano: Nekonečno je paradoxní

- Existuje aspoň jedna pravdivá věta. (*ParUn.* § 13)
Důsledek: Existuje neomezeně mnoho pravdivých vět.
- Bůh je vševědoucí. (*ParUn.* § 11)
Důsledek: V boží mysli jsou všechny pravdivé věty.
- Závěr: Nekonečné množství existuje.



1781–1848

Eukleidovy axiomy platí pouze pro konečná množství.

Bernard Bolano: Nekonečno je paradoxní



1781–1848

- Existuje aspoň jedna pravdivá věta. (*ParUn.* § 13)
Důsledek: Existuje neomezeně mnoho pravdivých vět.
- Bůh je vševědoucí. (*ParUn.* § 11)
Důsledek: V boží mysli jsou všechny pravdivé věty.
- Závěr: Nekonečné množství existuje.

Eukleidovy axiomy platí pouze pro konečná množství.

- Pozoruhodný vztah dvou nekonečných množství spočívá v tom, že je možno každý předmět jednoho množství spojit s předmětem z druhého množství ve dvojici tak, že žádný předmět v obou množstvích nezůstane bez spojení a že také žádný se nevyskytuje ve dvou či více dvojicích.

Bernard Bolano: Nekonečno je paradoxní



1781–1848

- Existuje aspoň jedna pravdivá věta. (*ParUn.* § 13)
Důsledek: Existuje neomezeně mnoho pravdivých vět.
- Bůh je vševědoucí. (*ParUn.* § 11)
Důsledek: V boží mysli jsou všechny pravdivé věty.
- Závěr: Nekonečné množství existuje.

Eukleidovy axiomy platí pouze pro konečná množství.

- Pozoruhodný vztah dvou nekonečných množství spočívá v tom, že je možno každý předmět jednoho množství spojit s předmětem z druhého množství ve dvojici tak, že žádný předmět v obou množstvích nezůstane bez spojení a že také žádný se nevyskytuje ve dvou či více dvojicích.
- Avšak přes to mohou tato množství být ve vztahu nerovnosti, takže se jedno jeví být pouze částí druhého.

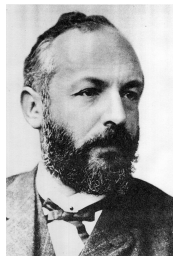
Georg Cantor: S nekonečny lze počítat



1845–1918

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.



1845–1918

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

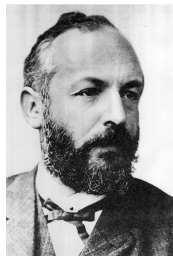
- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*



1845–1918

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část*.
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0

Celých čísel je \aleph_0 .



1845–1918

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Celých čísel je \aleph_0 .

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, \dots$

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Racionálních čísel je \aleph_0 .

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část*.
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Racionálních čísel je \aleph_0 .

1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$...
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$...
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$...
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$...
$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{8}{7}$...
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$...

$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, 5, \dots$

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat



1845–1918

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část*.
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0

Racionálních čísel je \aleph_0 .

1	2	3	4	5	6	7	8	...	
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$...	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$...	
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$...	
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$...	,
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$...	
$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{8}{7}$...	
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$...	

1, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{3}$, 3, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 4, $\frac{1}{5}$, 5 ...

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0

Reálných čísel je více než \aleph_0 .



1845–1918

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Reálných čísel je více než \aleph_0 .

Sporem: $0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} \dots$
 $0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} a_{26} \dots$
 $0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} a_{36} \dots$
 $0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} a_{45} a_{46} \dots$
 $0, a_{51} a_{52} a_{53} a_{54} a_{55} a_{56} \dots$
 $0, a_{61} a_{62} a_{63} a_{64} a_{65} a_{66} \dots$
 \vdots

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Reálných čísel je více než \aleph_0 .

Sporem: $0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} \dots$
 $0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} a_{26} \dots$
 $0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} a_{36} \dots$
 $0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} a_{45} a_{46} \dots$
 $0, a_{51} a_{52} a_{53} a_{54} a_{55} a_{56} \dots$
 $0, a_{61} a_{62} a_{63} a_{64} a_{65} a_{66} \dots$
 \vdots

$$0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots \quad b_i = \begin{cases} 0, & a_{ii} \neq 0 \\ 1, & a_{ii} = 0 \end{cases}$$

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Reálných čísel je více než \aleph_0 .

Sporem: $0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} \dots$
 $0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} a_{26} \dots$
 $0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} a_{36} \dots$
 $0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} a_{45} a_{46} \dots$
 $0, a_{51} a_{52} a_{53} a_{54} a_{55} a_{56} \dots$
 $0, a_{61} a_{62} a_{63} a_{64} a_{65} a_{66} \dots$

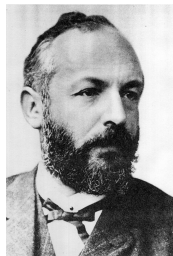
⋮

$$0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots \quad b_i = \begin{cases} 0, & a_{ii} \neq 0 \\ 1, & a_{ii} = 0 \end{cases}$$

Cantorův diagonální argument

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0

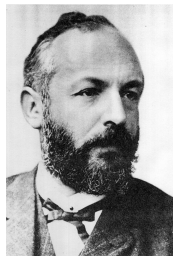


1845–1918

Bodů na úsečce je stejné množství jako bodů ve čtverci

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Bodů na úsečce je stejné množství jako bodů ve čtverci

Body jednotkového čtverce (x, y) , $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

Body jednotkové úsečky: q , $0 \leq q \leq 1$.

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat



1845–1918

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část*.
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0

Bodů na úsečce je stejné množství jako bodů ve čtverci

Body jednotkového čtverce (x, y) , $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

Body jednotkové úsečky: q , $0 \leq q \leq 1$.

$$x = 0, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \xi_6 \xi_7 \dots, \quad y = 0, \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 \eta_6 \eta_7 \dots,$$

$$q = 0, \xi_1 \eta_1 \xi_2 \eta_2 \xi_3 \eta_3 \xi_4 \eta_4 \xi_5 \eta_5 \xi_6 \eta_6 \dots$$

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Bodů na úsečce je stejné množství jako bodů ve čtverci

Body jednotkového čtverce (x, y) , $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

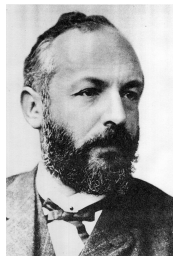
Body jednotkové úsečky: q , $0 \leq q \leq 1$.

$$q = 0,010203040506070809010 \dots,$$

$$x = 0,0103050709 \dots, \quad y = 0,02040608010 \dots$$

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Bodů na úsečce je stejné množství jako bodů ve čtverci

Body jednotkového čtverce (x, y) , $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

Body jednotkové úsečky: q , $0 \leq q \leq 1$.

$$q = 0, \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4 \varrho_5 \varrho_6 \varrho_7 \varrho_8 \varrho_9 \varrho_{10} \cdots,$$

$$x = 0, \varrho_1 \varrho_3 \varrho_5 \varrho_7 \varrho_9 \cdots, \quad y = 0, \varrho_2 \varrho_4 \varrho_6 \varrho_8 \varrho_{10} \cdots$$



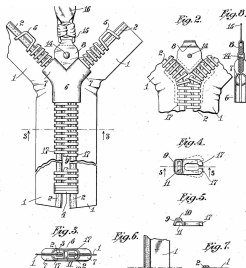
Cantorův zip

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

Exkurs

V té době vznikl i opravdový zip (zdrhovadlo)

Roku 1851 si ho nechal patentovat Elias Howe (vynálezce šicího stroje)



Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0



1845–1918

Bodů na úsečce je stejné množství jako bodů ve čtverci

Body jednotkového čtverce (x, y) , $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

Body jednotkové úsečky: q , $0 \leq q \leq 1$.

$$q = 0,010203040506070809010 \dots,$$

$$x = 0,0103050709 \dots, y = 0,02040608010 \dots$$

George Cantor Richardu Dedekindovi, 29. června 1877:

Je le vois, mais je ne crois pas!

Georg Cantor: S nekonečny lze počítat

- Axiom *co se kryje, rovno jest* platí i pro nekonečná množství.
- Axiom *celek je větší než část* je nutné zeslabit: *celek není menší než část.*
- Nejmenší nekonečné množství je množství přirozených čísel \aleph_0
- Ke každému nekonečnému množství existuje množství větší, $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots$



1845–1918

Naivní teorie množin

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Podmnožina $a \subseteq b := \forall x (x \in a \text{ plyne } x \in b)$

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Podmnožina $a \subseteq b := \forall x (x \in a \text{ plyne } x \in b)$

Operace s množinami:

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Podmnožina $a \subseteq b := \forall x (x \in a \text{ plyne } x \in b)$

Operace s množinami:

- sjednocení množin $a \cup b := \{x : x \in a \text{ nebo } x \in b\}$

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Podmnožina $a \subseteq b := \forall x (x \in a \text{ plyne } x \in b)$

Operace s množinami:

- sjednocení množin $a \cup b := \{x : x \in a \text{ nebo } x \in b\}$
- průnik množin $a \cap b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \in b\}$

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Podmnožina $a \subseteq b := \forall x (x \in a \text{ plyne } x \in b)$

Operace s množinami:

- sjednocení množin $a \cup b := \{x : x \in a \text{ nebo } x \in b\}$
- průnik množin $a \cap b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \in b\}$
- rozdíl množin $a \setminus b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \notin b\}$

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Podmnožina $a \subseteq b := \forall x (x \in a \text{ plyne } x \in b)$

Operace s množinami:

- sjednocení množin $a \cup b := \{x : x \in a \text{ nebo } x \in b\}$
- průnik množin $a \cap b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \in b\}$
- rozdíl množin $a \setminus b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \notin b\}$

Uspořádaná dvojice: $(x, y) := \{ \{x\}, \{x, y\} \}$

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Podmnožina $a \subseteq b := \forall x (x \in a \text{ plyne } x \in b)$

Operace s množinami:

- sjednocení množin $a \cup b := \{x : x \in a \text{ nebo } x \in b\}$
- průnik množin $a \cap b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \in b\}$
- rozdíl množin $a \setminus b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \notin b\}$

Uspořádaná dvojice: $(x, y) := \{ \{x\}, \{x, y\} \}$

Kartézský součin množin: $a \times b := \{(x, y) : x \in a, y \in b\}$

Naivní teorie množin

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Podmnožina $a \subseteq b := \forall x (x \in a \text{ plyne } x \in b)$

Operace s množinami:

- sjednocení množin $a \cup b := \{x : x \in a \text{ nebo } x \in b\}$
- průnik množin $a \cap b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \in b\}$
- rozdíl množin $a \setminus b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \notin b\}$

Uspořádaná dvojice: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Kartézský součin množin: $a \times b := \{(x, y) : x \in a, y \in b\}$

Relace ρ na množině a : $\rho \subseteq a \times a$

Korespondence κ množin a, b : $\kappa \subseteq a \times b$

Naivní teorie množin – univerzální jazyk matematiky

Primitivní pojmy:

- množina
- být prvkem \in

Prázdná množina $\emptyset := \{x : x \neq x\}$

Podmnožina $a \subseteq b := \forall x \in a \text{ plyne } x \in b$

Operace s množinami:

- sjednocení množin $a \cup b := \{x : x \in a \text{ nebo } x \in b\}$
- průnik množin $a \cap b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \in b\}$
- rozdíl množin $a \setminus b := \{x : x \in a \text{ a současně } x \notin b\}$

Uspořádaná dvojice: $(x, y) := \{ \{x\}, \{x, y\} \}$

Kartézský součin množin: $a \times b := \{(x, y) : x \in a, y \in b\}$

Relace ρ na množině a : $\rho \subseteq a \times a$

Korespondence κ množin a, b : $\kappa \subseteq a \times b$

Naivní teorie množin – pokračování

Naivní teorie množin – pokračování

Zobrazení množiny a do množiny b , $f : a \rightarrow b : f \subseteq a \times b$ taková, že z $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ plyne $y_1 = y_2$

Naivní teorie množin – pokračování

Zobrazení množiny a do množiny b , $f : a \rightarrow b$: $f \subseteq a \times b$ taková, že z $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ plyne $y_1 = y_2$

Prosté zobrazení (*injekce*) množiny a do množiny b : takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že z $(x_1, y_1) \in f, (x_2, y_2) \in f, x_1 \neq x_2$ plyne $y_1 \neq y_2$

Naivní teorie množin – pokračování

Zobrazení množiny a do množiny b , $f : a \rightarrow b$: $f \subseteq a \times b$ taková, že z $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ plyne $y_1 = y_2$

Prosté zobrazení (*injekce*) množiny a do množiny b : takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že z $(x_1, y_1) \in f, (x_2, y_2) \in f, x_1 \neq x_2$ plyne $y_1 \neq y_2$

Zobrazení množiny a na množiny b (*surjekce*): takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že ke každému $y \in b$ existuje $x \in a$, že $(x, y) \in f$

Naivní teorie množin – pokračování

Zobrazení množiny a do množiny b , $f : a \rightarrow b$: $f \subseteq a \times b$ taková, že z $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ plyne $y_1 = y_2$

Prosté zobrazení (*injekce*) množiny a do množiny b : takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že z $(x_1, y_1) \in f, (x_2, y_2) \in f, x_1 \neq x_2$ plyne $y_1 \neq y_2$

Zobrazení množiny a na množiny b (*surjekce*): takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že ke každému $y \in b$ existuje $x \in a$, že $(x, y) \in f$

Vzájemně jednoznačné zobrazení množin (*bijekce*) a, b : zobrazení $a \rightarrow b$, které je současně injekce a surjekce.

Naivní teorie množin – pokračování

Zobrazení množiny a do množiny b , $f : a \rightarrow b$: $f \subseteq a \times b$ taková, že z $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ plyne $y_1 = y_2$

Prosté zobrazení (*injekce*) množiny a do množiny b : takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že z $(x_1, y_1) \in f, (x_2, y_2) \in f, x_1 \neq x_2$ plyne $y_1 \neq y_2$

Zobrazení množiny a na množiny b (*surjekce*): takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že ke každému $y \in b$ existuje $x \in a$, že $(x, y) \in f$

Vzájemně jednoznačné zobrazení množin (*bijekce*) a, b : zobrazení $a \rightarrow b$, které je současně injekce a surjekce.

Množiny a, b mají stejnou *mohutnost*, $|a| = |b|$, pokud existuje bijekce $a \rightarrow b$.

Naivní teorie množin – pokračování

Zobrazení množiny a do množiny b , $f : a \rightarrow b : f \subseteq a \times b$ taková, že $z (x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ plyne $y_1 \neq y_2$

Prosté zobrazení (*injekce*) množiny a do množiny b : takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že $z (x_1, y_1) \in f, (x_2, y_2) \in f, x_1 \neq x_2$ plyne $y_1 \neq y_2$

Zobrazení množiny a na množiny b (*surjekce*): takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že ke každému $y \in b$ existuje $x \in a$, že $(x, y) \in f$

Vzájemně jednoznačné zobrazení množin (*bijekce*) a, b : zobrazení $a \rightarrow b$, které je současně injekce a surjekce.

Množiny a, b mají stejnou *mohutnost*, $|a| = |b|$, pokud existuje bijekce $a \rightarrow b$.

Množina a nemá větší mohutnost než množina b , $|a| \leq |b|$, pokud existuje injekce $a \rightarrow b$.

Naivní teorie množin – pokračování

Zobrazení množiny a do množiny b , $f : a \rightarrow b : f \subseteq a \times b$ taková, že $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ plyne $y_1 \neq y_2$

Prosté zobrazení (*injekce*) množiny a do množiny b : takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že z $(x_1, y_1) \in f, (x_2, y_2) \in f, x_1 \neq x_2$ plyne $y_1 \neq y_2$

Zobrazení množiny a na množiny b (*surjekce*): takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že ke každému $y \in b$ existuje $x \in a$, že $(x, y) \in f$

Vzájemně jednoznačné zobrazení množin (*bijekce*) a, b : zobrazení $a \rightarrow b$, které je současně injekce a surjekce.

Množiny a, b mají stejnou *mohutnost*, $|a| = |b|$, pokud existuje bijekce $a \rightarrow b$.

Množina a nemá větší mohutnost než množina b , $|a| \leq |b|$, pokud existuje injekce $a \rightarrow b$.

Platí: $|a| = |b|$ právě tehdy, když $|a| \leq |b|$ a současně $|b| \leq |a|$.

Naivní teorie množin – pokračování

Zobrazení množiny a do množiny b , $f : a \rightarrow b : f \subseteq a \times b$ taková, že $z (x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ plyne $y_1 \neq y_2$

Prosté zobrazení (*injekce*) množiny a do množiny b : takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že $z (x_1, y_1) \in f, (x_2, y_2) \in f, x_1 \neq x_2$ plyne $y_1 \neq y_2$

Zobrazení množiny a na množiny b (*surjekce*): takové zobrazení $f : a \rightarrow b$ že ke každému $y \in b$ existuje $x \in a$, že $(x, y) \in f$

Vzájemně jednoznačné zobrazení množin (*bijekce*) a, b : zobrazení $a \rightarrow b$, které je současně injekce a surjekce.

Množiny a, b mají stejnou *mohutnost*, $|a| = |b|$, pokud existuje bijekce $a \rightarrow b$.

Množina a nemá větší mohutnost než množina b , $|a| \leq |b|$, pokud existuje injekce $a \rightarrow b$.

Platí: $|a| = |b|$ právě tehdy, když $|a| \leq |b|$ a současně $|b| \leq |a|$.

Potenční množina množiny a : $\mathcal{P}(a) := \{b : b \subseteq a\}$

Babylónská věž

Přirozená čísla: $0 := \emptyset$

$1 := \{\emptyset\}$

$2 := \{\{\emptyset\}\}$

Babylónská věž

Přirozená čísla: $0 := \emptyset$
 $1 := \{\emptyset\}$
 $2 := \{\{\emptyset\}\}$
 \vdots
 $n := \{n - 1\}$
 \vdots

Babylónská věž

Přirozená čísla: $0 := \emptyset$

$1 := \{\emptyset\}$

$2 := \{\{\emptyset\}\}$

\vdots

$n := \{n - 1\}$

\vdots

$$|a| < |\mathcal{P}(a)|$$

Babylónská věž

Přirozená čísla: $0 := \emptyset$
 $1 := \{\emptyset\}$
 $2 := \{\{\emptyset\}\}$
 \vdots
 $n := \{n - 1\}$
 \vdots

$$|a| < |\mathcal{P}(a)|$$

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots \rightarrow \aleph$$

Je to skutečně tak?

Je to skutečně tak?

Stavba transfinite matematiky

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots \rightarrow \blacksquare$$

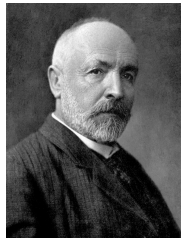
nemá žádnou oporu ve skutečnosti.

Je to skutečně tak?

Stavba transfinite matematiky

- babylónská věž, chrám novobarokní matematiky –
nemá žádnou oporu ve skutečnosti.

Je to skutečně tak?

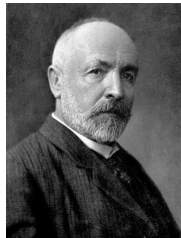


Georg F. L. P. Cantor
1845–1918

infinitum creatum sive transfinitum

infinitum æternum increatum sive Absolutum.

Je to skutečně tak?



Georg F. L. P. Cantor
1845–1918

infinitum creatum sive transfinitum

infinitum æternum increatum sive Absolutum.

*Nejsme nad světem, ale ve světě.
Nehledáme nekonečno v Boží mysli, ale ve světě.*



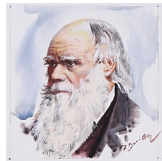
Petr Vopěnka
1935–2015/21

Παράδοξος σωρείτης

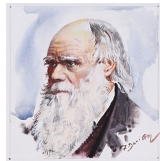
Παράδοξος σωρείτης



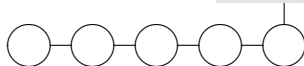
Παράδοξος σωρείτης



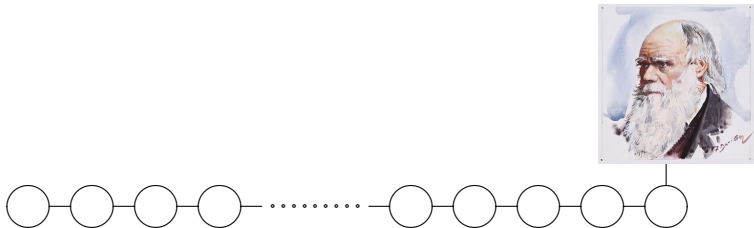
Παράδοξος σωρείτης



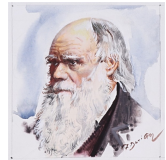
Παράδοξος σωρείτης



Παράδοξος σωρείτης



Παράδοξος σωρείτης



Tři úhly pohledu

Tři úhly pohledu

- Perspektiva první osoby

Tři úhly pohledu

- **Perspektiva první osoby**

jak se jednotlivým lidem věci zjevují,

nikoliv jaká je jejich „skutečná povaha“

Tři úhly pohledu

- **Perspektiva první osoby**

jak se jednotlivým lidem věci zjevují,

nikoliv jaká je jejich „skutečná povaha“

- **Perspektiva třetí osoby, Božího oka**

pohled z libovolně vzdáleného, (rádoby) bystrozrakého nadhledu

Tři úhly pohledu

- **Perspektiva první osoby**

jak se jednotlivým lidem věci zjevují,

nikoliv jaká je jejich „skutečná povaha“

- **Perspektiva třetí osoby, Božího oka**

pohled z libovolně vzdáleného, (rádoby) bystrozrakého nadhledu

běžný pro tradiční empirické vědy

– ze světa si vykrajují domény svého zájmu

Tři úhly pohledu

- **Perspektiva první osoby**

jak se jednotlivým lidem věci zjevují,

nikoliv jaká je jejich „skutečná povaha“

- **Perspektiva třetí osoby, Božího oka**

pohled z libovolně vzdáleného, (rádoby) bystrozrakého nadhledu
běžný pro tradiční empirické vědy

– ze světa si vykrajují domény svého zájmu
této perspektivě neuvědoměle podléhá většina lidí

Tři úhly pohledu

- **Perspektiva první osoby**

jak se jednotlivým lidem věci zjevují,

nikoliv jaká je jejich „skutečná povaha“

- **Perspektiva třetí osoby, Božího oka**

pohled z libovolně vzdáleného, (rádoby) bystrozrakého nadhledu
běžný pro tradiční empirické vědy

– ze světa si vykrajují domény svého zájmu

této perspektivě neuvědoměle podléhá většina lidí

- **Perspektiva theoretických matematik**

Tři úhly pohledu

- **Perspektiva první osoby**

jak se jednotlivým lidem věci zjevují,

nikoliv jaká je jejich „skutečná povaha“

- **Perspektiva třetí osoby, Božího oka**

pohled z libovolně vzdáleného, (rádoby) bystrozrakého nadhledu
běžný pro tradiční empirické vědy

– ze světa si vykrajují domény svého zájmu

této perspektivě neuvědoměle podléhá většina lidí

- **Perspektiva theoretických matematik**

vidí ideální objekty, které nepodléhají jiným než logickým

kriteriím správnosti

Tři úhly pohledu

■ Perspektiva první osoby

jak se jednotlivým lidem věci zjevují,

nikoliv jaká je jejich „skutečná povaha“

■ Perspektiva třetí osoby, Božího oka

pohled z libovolně vzdáleného, (rádoby) bystrozrakého nadhledu
běžný pro tradiční empirické vědy

– ze světa si vykrajují domény svého zájmu

této perspektivě neuvědoměle podléhá většina lidí

■ Perspektiva theoretických matematik

vidí ideální objekty, které nepodléhají jiným než logickým

kriteriím správnosti

tyto objekty jsou „podkládány“ výkladům jevů

Tři úhly pohledu

■ Perspektiva první osoby

jak se jednotlivým lidem věci zjevují,

nikoliv jaká je jejich „skutečná povaha“

■ Perspektiva třetí osoby, Božího oka

pohled z libovolně vzdáleného, (rádoby) bystrozrakého nadhledu
běžný pro tradiční empirické vědy

– ze světa si vykrajují domény svého zájmu
této perspektivě neuvědoměle podléhá většina lidí

■ Perspektiva theoretických matematik

vidí ideální objekty, které nepodléhají jiným než logickým

kriteriím správnosti

tyto objekty jsou „podkládány“ výkladům jevů

Svět poznávaný tělesnými smysly by měl být bránou do světa reálného a reálný svět místem zrodu ústrojných výkladů jevů pozorovaných tělesnými smysly, které občas umožňují do těchto jevů i činně zasahovat. ... nový reálný svět pochopitelně nebude veškerou spleť jevů, do níž jsme vrženi, ale jen částí přístupnou vědeckému zkoumání.

Reálným světem rozumíme jisté doplnění a prodloužení světa poznávaného tělesnými smysly.

P: Vopěnka: Meditace o základech vědy, str. 184, 39

Obzor



Obzor



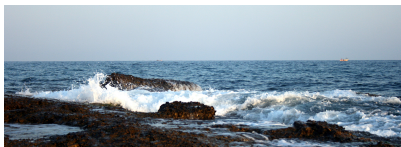
Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

Obzor



Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené. Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Obzor



Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,

vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

- **Obzor dálkový**

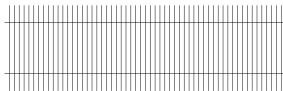
Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

■ Obzor dálkový



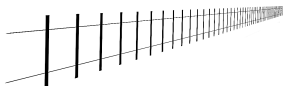
Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

■ Obzor dálkový



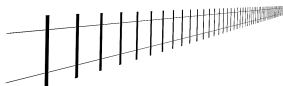
Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

- **Obzor dálkový**



- **Obzor hloubkový**

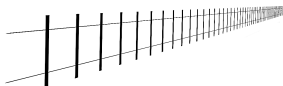
Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

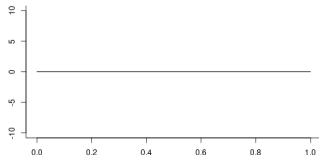
Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

■ Obzor dálkový



■ Obzor hloubkový



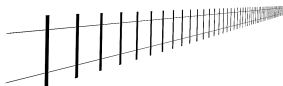
Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

■ Obzor dálkový



■ Obzor hloubkový

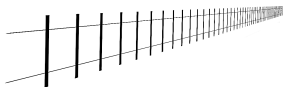
Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

- **Obzor dálkový**



- **Obzor hloubkový, jemné struktury**

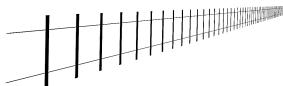
Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

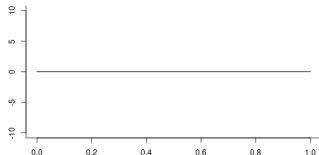
Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

■ Obzor dálkový



■ Obzor hloubkový, jemné struktury



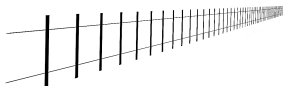
Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

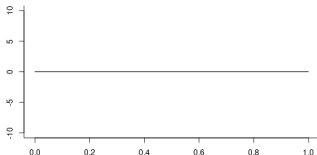
Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

■ Obzor dálkový



■ Obzor hloubkový, jemné struktury



Přirozené nekonečno se nachází již před obzorem.

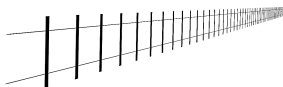
Obzor

Obzor je pomyslným rozhraním oddělujícím osvětlenou část pozorovaného předmětu, to je tu, která je pohledem zachycena, od části neosvětlené, to je pohledem nezachycené.

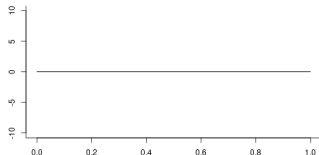
Směrem k obzoru vzrůstá na osvětlené části pozorovaného předmětu *neurčitost*.

Předměty mají vždy svou skrytou stránku,
vlastnosti mají vždy svou nedourčenost.

■ Obzor dálkový



■ Obzor hloubkový, jemné struktury



Přirozené nekonečno se nachází již před obzorem.

Tvar je stopa objektu na obzoru.

Jevy a objekty

- Jev

Jevy a objekty

- Jev
- **Objekt** – rozpoznaný a pojmenovaný jev

Jevy a objekty

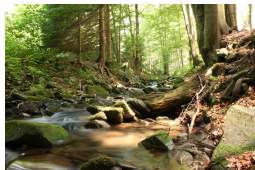
- **Jev**
- **Objekt** – rozpoznatý a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů

Jevy a objekty

- **Jev**
- **Objekt** – rozpoznatý a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:

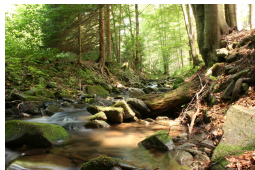
Jevy a objekty

- Jev
- **Objekt** – rozpoznaný a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:



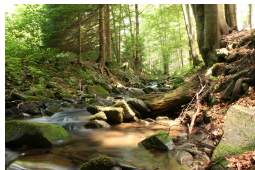
Jevy a objekty

- Jev
- **Objekt** – rozpoznaný a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:
 - je částí
 - je prvkem



Jevy a objekty

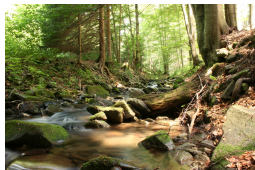
- Jev
- **Objekt** – rozpoznatý a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:
 - je částí
 - je prvkem



Klasická aristotelská logika: Pojem má **obsah** a **rozsah**,
obsah je určen rozsahem.

Jevy a objekty

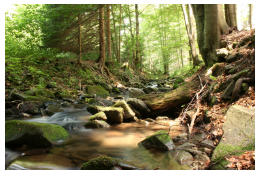
- Jev
- **Objekt** – rozpoznaný a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:
 - **je částí** – predikát
 - **je prvkem** – subjekt



Klasická aristotelská logika: Pojem má **obsah** a **rozsah**,
obsah je určen rozsahem.

Jevy a objekty

- Jev
- **Objekt** – rozpoznaný a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:
 - **je částí** – predikát
 - **je prvkem** – subjekt



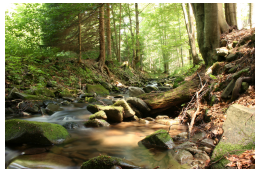
Klasická aristotelská logika: Pojem má **obsah** a **rozsah**,
obsah je určen rozsahem.

Ale: vodníci, kteří bydlí pod Karlovým mostem
jeskyňky, které unesly Smolíčka Pacholíčka



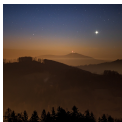
Jevy a objekty

- Jev
- **Objekt** – rozpoznaný a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:
 - **je částí** – predikát
 - **je prvkem** – subjekt



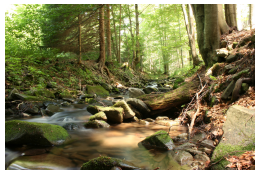
Klasická aristotelská logika: Pojem má **obsah** a **rozsah**,
obsah je určen rozsahem.

Ale: Jitřenka
Večernice



Jevy a objekty

- Jev
- **Objekt** – rozpoznaný a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:
 - **je částí** – predikát
 - **je prvkem** – subjekt



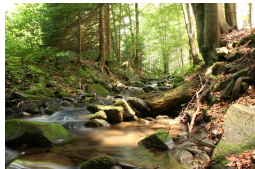
Klasická aristotelská logika: Pojem má **obsah** a **rozsah**,
obsah je určen rozsahem.

Ale: Jitřenka – nejjasnější bludná hvězda na ranní obloze
Večernice – nejjasnější bludná hvězda na večerní obloze



Jevy a objekty

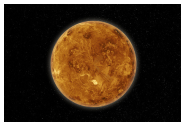
- Jev
- **Objekt** – rozpoznaný a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:
 - **je částí** – predikát
 - **je prvkem** – subjekt



Klasická aristotelská logika: Pojem má **obsah** a **rozsah**,
obsah je určen rozsahem.

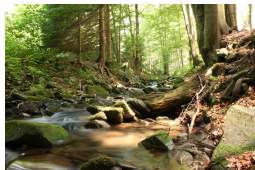
Ale: Jitřenka – nejjasnější bludná hvězda na ranní obloze
Večernice – nejjasnější bludná hvězda na večerní obloze

Planeta Venuše



Jevy a objekty

- **Jev**
- **Objekt** – rozpoznaný a pojmenovaný jev
- **Seskupení objektů** – neuvažujeme charakter ani vztahy seskupených objektů
- Jevy náležení:
 - **je částí** – predikát
 - **je prvkem** – subjekt



Klasická aristotelská logika: Pojem má **obsah** a **rozsah**,
obsah je určen rozsahem.

Ale: Jitřenka – nejjasnější bludná hvězda na ranní obloze

Večernice – nejjasnější bludná hvězda na večerní obloze

Planeta Venuše

Pojem má **smysl** a **význam**.

Seskupení jevů

- **Obor** – objekty, které nemusí být aktualizované, vytvořené

Seskupení jevů

- **Obor** – objekty, které nemusí být aktualizované, vytvořené
- **Třída** – objekty existující

Seskupení jevů

- **Obor** – objekty, které nemusí být aktualizované, vytvořené
- **Třída** – objekty existující
- **Množina** – objekty ostře vymezené (před obzorem)

Seskupení jevů

- **Obor** – objekty, které nemusí být aktualizované, vytvořené
- **Třída** – objekty existující
- **Množina** – objekty ostře vymezené (před obzorem)

Množina je třída, třída je obor

Seskupení jevů

- **Obor** – objekty, které nemusí být aktualizované, vytvořené
- **Třída** – objekty existující
- **Množina** – objekty ostře vymezené (před obzorem)

Množina je třída, třída je obor

Vlastní třída – třída, která není množinou

Seskupení jevů

- **Obor** – objekty, které nemusí být aktualizované, vytvořené
- **Třída** – objekty existující
- **Množina** – objekty ostře vymezené (před obzorem)

Množina je třída, třída je obor

Vlastní třída – třída, která není množinou

Polomnožina – vlastní třída, která je částí nějaké množiny

Seskupení jevů

- **Obor** – objekty, které nemusí být aktualizované, vytvořené
- **Třída** – objekty existující
- **Množina** – objekty ostře vymezené (před obzorem)

Množina je třída, třída je obor

Vlastní třída – třída, která není množinou

Polomnožina – vlastní třída, která je částí nějaké množiny

Nekonečná množina – množina, jejíž částí je polomnožina, která je vlastní třídou.

σ - a π -třídy

Vlastnosti:

σ - a π -třídy

Vlastnosti:

- prvoevidovatelné (rozpozatelné hned, když vystoupí před obzor)

σ - a π -třídy

Vlastnosti:

- prvoevidovatelné (rozpozatelné hned, když vystoupí před obzor)
- ty ostatní

σ - a π -třídy

Vlastnosti:

- prvoevidovatelné (rozpozatelné hned, když vystoupí před obzor)
- ty ostatní

σ -třída tvořená objekty, které mají prvoevidovatelnou vlastnost

.....

σ - a π -třídy

Vlastnosti:

- prvoevidovatelné (rozpozatelné hned, když vystoupí před obzor)
- ty ostatní

σ -třída tvořená objekty, které mají prvoevidovatelnou vlastnost

....(.....)....

σ - a π -třídy

Vlastnosti:

- prvoevidovatelné (rozpozatelné hned, když vystoupí před obzor)
- ty ostatní

σ -třída tvořená objekty, které mají prvoevidovatelnou vlastnost

....((....(....))....)....

σ - a π -třídy

Vlastnosti:

- prvoevidovatelné (rozpozatelné hned, když vystoupí před obzor)
- ty ostatní

σ -třída tvořená objekty, které mají prvoevidovatelnou vlastnost

.... . . (.. (... (.... (.....)))) ..)

σ - a π -třídy

Vlastnosti:

- prvoevidovatelné (rozpozatelné hned, když vystoupí před obzor)
- ty ostatní

σ -třída tvořená objekty, které mají prvoevidovatelnou vlastnost

$$\dots \left[\left(\left(\left(\left(\left(\left(\dots \right) \dots \right) \dots \right) \dots \right) \dots \right) \dots \right) \dots \right] \dots$$

**MASARYKOVA
UNIVERZITA**