Nejistota: Pravděpodobnost a teorie her

CORE004 Matematika jako součást kultury

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

2. listopadu 2023

Obsah

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)} \mathrm{P}(A|H)$$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Příklad: Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Příklad: Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

A – k cunami došlo a firma začala stavět
H – firma umí vyvolat cunami
$\mathrm{P}(A|H) = 0{,}99$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Příklad: Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

A – k cunami došlo a firma začala stavět, $\mathrm{P}(A) = 1$.
H – firma umí vyvolat cunami, $\mathrm{P}(H) = 0{,}0001$.
$\mathrm{P}(A|H) = 0{,}99$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Příklad: Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

A – k cunami došlo a firma začala stavět, $\mathrm{P}(A) = 1$.
H – firma umí vyvolat cunami, $\mathrm{P}(H) = 0{,}0001$.
$\mathrm{P}(A|H) = 0{,}99$

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H) \doteq 0{,}0001$$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Příklad: Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

A – k cunami došlo a firma začala stavět, $\mathrm{P}(A) = 1$.
H – firma umí vyvolat cunami, $\mathrm{P}(H) = 0{,}0001$, $\mathrm{P}(\Omega \setminus H) = 0{,}9999$.
$\mathrm{P}(A|H) = 0{,}99$ $\mathrm{P}(A|\Omega \setminus H) = 0{,}01$

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H) \doteq 0{,}0001 \qquad \mathrm{P}(\Omega \setminus H|A) = \frac{\mathrm{P}(\Omega \setminus H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H) \doteq 0{,}0100$$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

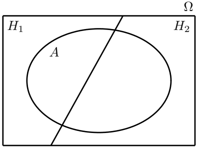
Příklad: Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

A – k cunami došlo a firma začala stavět, $\mathrm{P}(A) = 1$.
H – firma umí vyvolat cunami, $\mathrm{P}(H) = 0{,}0001$, $\mathrm{P}(\Omega \setminus H) = 0{,}9999$.
$\mathrm{P}(A|H) = 0{,}99$ $\mathrm{P}(A|\Omega \setminus H) = 0{,}01$

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H) \doteq 0{,}0001 \qquad \mathrm{P}(\Omega \setminus H|A) = \frac{\mathrm{P}(\Omega \setminus H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H) \doteq 0{,}0100$$

Induktivní úsudek: Je-li $\mathrm{P}(H|A) > \mathrm{P}(\Omega \setminus H|A)$, pak ze skutečnosti, že nastal jev A usuzujeme, že platí hypotéza H.

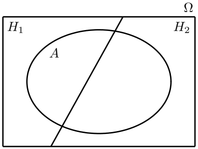
Celková pravděpodobnost



Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}\big((A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\big) = \mathrm{P}(A\cap H_1)+\mathrm{P}(A\cap H_2) = \\ &= \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1)+\mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2) \end{aligned}$$

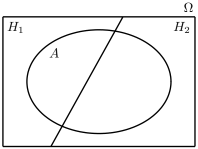
Celková pravděpodobnost



Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

Celková pravděpodobnost

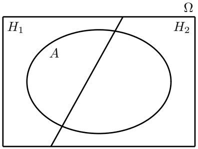


Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

Příklad:

Celková pravděpodobnost



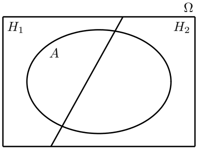
Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

Příklad: Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

Celková pravděpodobnost



Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

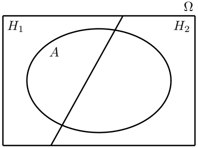
Příklad: Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

A – zkoušený odpoví správně,

H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď,

Celková pravděpodobnost



Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

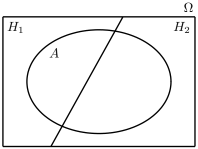
$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

Příklad: Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

A – zkoušený odpoví správně, $P(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $P(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $P(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $P(H_2) = \frac{k}{100}$,

Celková pravděpodobnost



Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

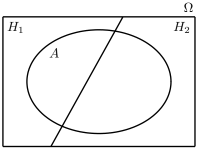
Příklad: Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

A – zkoušený odpoví správně, $\mathrm{P}(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $\mathrm{P}(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $\mathrm{P}(H_2) = \frac{k}{100}$,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{100-k}{100}\frac{1}{4} + \frac{k}{100} = \frac{100+3k}{400}$$

Celková pravděpodobnost



Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

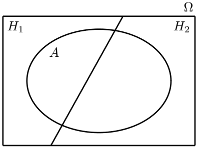
Příklad: Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

A – zkoušený odpoví správně, $\mathrm{P}(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $\mathrm{P}(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $\mathrm{P}(H_2) = \frac{k}{100}$,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{100 + 3k}{400}$$

Celková pravděpodobnost



Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

Příklad: Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

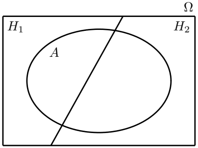
a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

A – zkoušený odpoví správně, $P(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $P(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $P(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $P(H_2) = \frac{k}{100}$,

$$P(A) = \frac{100 + 3k}{400}$$

b) Kolik musí zkoušený znát odpovědí, aby pravděpodobnost úspěchu byla větší než $\frac{1}{2}$?

Celková pravděpodobnost



Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

Příklad: Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

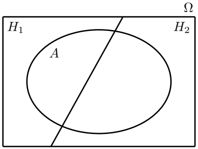
A – zkoušený odpoví správně, $\mathrm{P}(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $\mathrm{P}(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $\mathrm{P}(H_2) = \frac{k}{100}$,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{100 + 3k}{400}$$

b) Kolik musí zkoušený znát odpovědí, aby pravděpodobnost úspěchu byla větší než $\frac{1}{2}$?

$$\frac{100 + 3k}{400} > \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; k > \frac{100}{3}, \quad k \geq 34$$

Celková pravděpodobnost



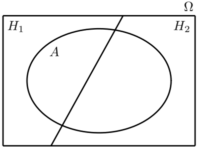
Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

Zobecnění:
Nechť základní prostor Ω je rozdělen na n po dvou neslučitelných jevů $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Pak pro každý jev $A \subseteq \Omega$ platí

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

Bayesův vzorec

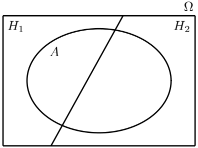


Thomas Bayes
1702–1761

Bayesův vzorec

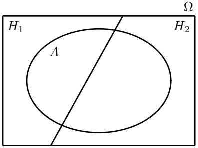
Inverzní pravděpodobnost:

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$



Thomas Bayes
1702–1761

Bayesův vzorec



Inverzní pravděpodobnost:

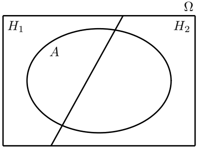
$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Celková pravděpodobnost:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

Thomas Bayes
1702–1761

Bayesův vzorec



Inverzní pravděpodobnost:

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

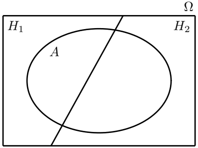
Celková pravděpodobnost:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

$$\mathrm{P}(H_1|A) = \frac{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1)}{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)}$$

Thomas Bayes
1702–1761

Bayesův vzorec



Inverzní pravděpodobnost:

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Celková pravděpodobnost:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

$$\mathrm{P}(H_1|A) = \frac{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1)}{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)}$$

Zobecnění:
Nechť základní prostor Ω je rozdělen na n po dvou neslučitelných jevů $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Pak platí

$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A|H_k)}{\mathrm{P}(A)\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A|H_i)}.$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají.

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají.

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají.

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají.

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky.

incidence … počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence … celkový počet nemocných

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají.

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají.

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky.

incidence … počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence … celkový počet nemocných

Otázka: jaká je pravděpodobnost, že vyšetřovaný objekt příslušnou charakteristiku vykazuje (má chorobu), pokud test dal pozitivní výsledek? $\mathrm{P}(H|+) =$?

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají. $p = \mathrm{P}(+|H)$

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají. $q = \mathrm{P}(-|H')$

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky $r = \mathrm{P}(H)$.

incidence … počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence … celkový počet nemocných

Otázka: jaká je pravděpodobnost, že vyšetřovaný objekt příslušnou charakteristiku vykazuje (má chorobu), pokud test dal pozitivní výsledek? $\mathrm{P}(H|+) = ?$

Označení jevů: H … objekt vykazuje charakteristiku (má chorobu)
H' … objekt nevykazuje charakteristiku (nemá chorobu)

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají. $p = \mathrm{P}(+|H)$

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají. $q = \mathrm{P}(-|H')$

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky $r = \mathrm{P}(H)$.

incidence … počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence … celkový počet nemocných

Otázka: jaká je pravděpodobnost, že vyšetřovaný objekt příslušnou charakteristiku vykazuje (má chorobu), pokud test dal pozitivní výsledek? $\mathrm{P}(H|+) = ?$

Označení jevů: H … objekt vykazuje charakteristiku (má chorobu)
H' … objekt nevykazuje charakteristiku (nemá chorobu)

Jevy $+$ a $-$, H a H' jsou komplementární:

$$\mathrm{P}(H') = 1 - r,\ \mathrm{P}(+|H') = 1 - q,\ \mathrm{P}(-|H) = 1 - p$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1-p \\ \mathrm{P}(H') = 1-r & \mathrm{P}(+|H') = 1-q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1-p \\ \mathrm{P}(H') = 1-r & \mathrm{P}(+|H') = 1-q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathrm{P}(H|+) = \frac{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(+|H)}{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(+|H) + \mathrm{P}(H')\mathrm{P}(+|H')} = \frac{rp}{rp + (1-q)(1-r)} = \frac{rp}{1 - r - q + rp + rq}$$

$$\mathrm{P}(H|-) = \frac{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(-|H)}{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(-|H) + \mathrm{P}(H')\mathrm{P}(-|H')} = \frac{r(1-p)}{r(1-p) + (1-r)q} = \frac{r(1-p)}{r + q - rq - rp}$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1-p \\ \mathrm{P}(H') = 1-r & \mathrm{P}(+|H') = 1-q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathrm{P}(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathrm{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1 - p \\
\mathrm{P}(H') = 1 - r & \mathrm{P}(+|H') = 1 - q & \mathrm{P}(-|H') = q
\end{array}
$$

Bayesův vzorec:

$$
\mathrm{P}(H|+) = \frac{rp}{1 - r - q + rp + rq}
$$

$$
\mathrm{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r + q - rq - rp}
$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$
	senzitivita	$p = 0{,}998$
	specificita	$q = 0{,}99$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1-p \\ \mathrm{P}(H') = 1-r & \mathrm{P}(+|H') = 1-q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathrm{P}(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathrm{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$	
	senzitivita	$p = 0{,}998$	
	specificita	$q = 0{,}99$	$\mathrm{P}(H\|+) = 0{,}091$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1 - p \\ \mathrm{P}(H') = 1 - r & \mathrm{P}(+|H') = 1 - q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathrm{P}(H|+) = \frac{rp}{1 - r - q + rp + rq}$$

$$\mathrm{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r + q - rq - rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$	
	senzitivita	$p = 0{,}998$	
	specificita	$q = 0{,}99$	$\mathrm{P}(H\|+) = 0{,}091$

Kumulace zkušenosti: osoby s pozitivním výsledkem otestujeme znovu

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1-p \\ \mathrm{P}(H') = 1-r & \mathrm{P}(+|H') = 1-q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathrm{P}(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathrm{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Příklad: AIDS

incidence	$r = 0,001$	
senzitivita	$p = 0{,}998$	
specificita	$q = 0{,}99$	$\mathrm{P}(H|+) = 0{,}091$

Kumulace zkušenosti: osoby s pozitivním výsledkem otestujeme znovu

$$r_1 = 0{,}091: \qquad \mathrm{P}(H|++) = 0{,}909$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1-p \\ \mathrm{P}(H') = 1-r & \mathrm{P}(+|H') = 1-q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathrm{P}(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathrm{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$	
	senzitivita	$p = 0{,}998$	
	specificita	$q = 0{,}99$	$\mathrm{P}(H\|+) = 0{,}091$

Kumulace zkušenosti: osoby s pozitivním výsledkem otestujeme znovu

$r_1 = 0{,}091$: $\quad \mathrm{P}(H|++) = 0{,}909$

$r_2 = 0{,}909$: $\quad \mathrm{P}(H|+++) = 0{,}999, \ \mathrm{P}(H|++-) = 0{,}020$

Princip maximální věrohodnosti

„Jest zcela nezpochybnitelným faktem, že nemůžeme-li poznat nejpravdivější soudy, musíme se řídit soudy nejpravděpodobnějšími.“

René Descartes, Rozprava o metodě

René Descartes
1596–1650

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců a spočítáme počet označených mezi nimi.

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n,r) = \binom{n}{r}$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$:

$$c(n-m, r-k) = \binom{n-m}{r-k}$$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$:

$$c(n - m, r - k) = \binom{n - m}{r - k}$$

A_n^{mrk} ... jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$:

$$c(n-m, r-k) = \binom{n-m}{r-k}$$

A_n^{mrk} … jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

$$\mathrm{P}(A_n^{mrk}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$:

$$c(n - m, r - k) = \binom{n - m}{r - k}$$

A_n^{mrk} ... jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

$$\mathrm{P}(A_n^{mrk}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n - m}{r - k}}{\binom{n}{r}}$$

Hledáme takové n, aby při daných m, r, k byla hodnota $\mathrm{P}(A_n^{mrk})$ maximální.

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$:

$$c(n-m, r-k) = \binom{n-m}{r-k}$$

A_n^{mrk} … jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

$$\mathrm{P}(A_n^{mrk}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Hledáme takové n, aby při daných m, r, k byla hodnota $\mathrm{P}(A_n^{mrk})$ maximální.

Je $n \in \left\langle \frac{mr}{k}, \frac{mr}{k} + 1 \right)$.

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(B)$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(B) = 1 - \tfrac{1}{36}$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\left(\mathrm{P}(B)\right)^n = \qquad \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$1 - \big(\mathrm{P}(B)\big)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \big(\mathrm{P}(B)\big)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \big(\mathrm{P}(B)\big)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n > \tfrac{1}{2}$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \left(\mathrm{P}(B)\right)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n > \tfrac{1}{2}$$

$$n > \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{35}{36}} \doteq 24{,}61$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \big(\mathrm{P}(B)\big)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n > \tfrac{1}{2}$$

$$n > \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{35}{36}} \doteq 24{,}61$$

Počet hodů by měl být aspoň 25.

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče,

$$V = \begin{cases} b, & \text{pokud } \{\text{⚅}, \text{⚅}\} \text{ padlo}, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče,

$$V = \begin{cases} b, & \text{pokud } \{⚅, ⚅\} \text{ padlo}, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

C – jev: ve zbývajících $n - m$ hodech padne {⚅, ⚅}

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče,

$$V = \begin{cases} b, & \text{pokud } \{⚅,⚅\} \text{ padlo}, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

C – jev: ve zbývajících $n - m$ hodech padne $\{⚅,⚅\}$,

$$\mathrm{P}(C) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^{n-m} .$$

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče,

$$V = \begin{cases} b, & \text{pokud } \{⚅, ⚅\} \text{ padlo,} \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

C – jev: ve zbývajících $n - m$ hodech padne {⚅, ⚅} ,

$$\mathrm{P}(C) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^{n-m}.$$

Očekávaná částka pro prvního hráče:

$$\mathrm{E}V = \mathrm{P}(C)b$$

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě“ – výsledek závisí na náhodě.

,

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě“ – výsledek závisí na náhodě.

c – vklad do hry,
A – náhodný jev,

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě“ – výsledek závisí na náhodě.

c – vklad do hry,
A – náhodný jev,

V – výhra:

$$V = \begin{cases} d - c, & \text{jev } A \text{ nastal,} \\ -c, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě" – výsledek závisí na náhodě.

c – vklad do hry,
A – náhodný jev,

V – výhra:

$$V = \begin{cases} d - c, & \text{jev } A \text{ nastal,} \\ -c, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Očekávaná výhra

$$\mathrm{E}V = \mathrm{P}(A)(d-c) + \big(1 - P(A)\big)(-c)$$

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě“ – výsledek závisí na náhodě.

c – vklad do hry,
A – náhodný jev,

V – výhra:

$$V = \begin{cases} d - c, & \text{jev } A \text{ nastal,} \\ -c, & \text{jinak.} \end{cases}$$

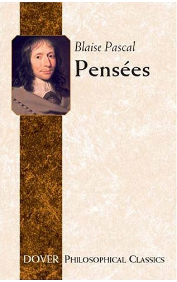
Očekávaná výhra

$$\mathrm{E}V = \mathrm{P}(A)(d - c) + \big(1 - P(A)\big)(-c) = d\mathrm{P}(A) - c.$$

Je-li $\mathrm{E}V > 0$, je výhodné vsadit c.

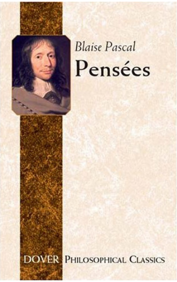
Očekávaná výhra

Pascalova sázka



Očekávaná výhra

Pascalova sázka

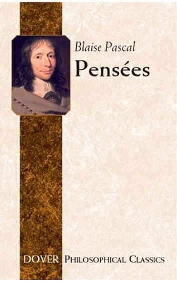


„Bůh jest, nebo není. Ale kam se nakloníme? Rozum tu nedovede nic rozhodnouti: je nekonečný chaos, který nás rozdvojuje. Hra se hraje v nejzazší krajnosti této nekonečné vzdálenosti, kde vyjde hlava nebo orel. Oč se sadíte? Rozumně nemůžete učiniti jedno ani druhé; rozumně nemůžete hájiti z obojího nic.“

Pascal, Myšlenky, 233

Očekávaná výhra

Pascalova sázka



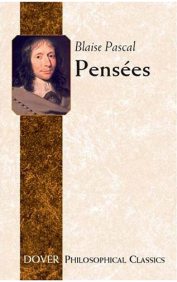
„Bůh jest, nebo není. Ale kam se nakloníme? Rozum tu nedovede nic rozhodnouti: je nekonečný chaos, který nás rozdvojuje. Hra se hraje v nejzazší krajnosti této nekonečné vzdálenosti, kde vyjde hlava nebo orel. Oč se sadíte? Rozumně nemůžete učiniti jedno ani druhé; rozumně nemůžete hájiti z obojího nic.“

Pascal, Myšlenky, 233

A – Bůh existuje,
c – praktikované náboženství, mravný život,
d – věčný život.

Očekávaná výhra

Pascalova sázka



„Bůh jest, nebo není. Ale kam se nakloníme? Rozum tu nedovede nic rozhodnouti: je nekonečný chaos, který nás rozdvojuje. Hra se hraje v nejzazší krajnosti této nekonečné vzdálenosti, kde vyjde hlava nebo orel. Oč se sadíte? Rozumně nemůžete učiniti jedno ani druhé; rozumně nemůžete hájiti z obojího nic.“

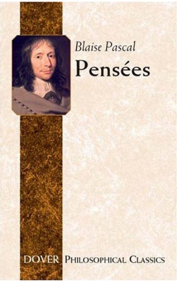
Pascal, Myšlenky, 233

A – Bůh existuje,
c – praktikované náboženství, mravný život,
d – věčný život.

Předpoklady: $\mathrm{P}(A) > 0$, $d = \infty$

Očekávaná výhra

Pascalova sázka



„Bůh jest, nebo není. Ale kam se nakloníme? Rozum tu nedovede nic rozhodnouti: je nekonečný chaos, který nás rozdvojuje. Hra se hraje v nejzazší krajnosti této nekonečné vzdálenosti, kde vyjde hlava nebo orel. Oč se sadíte? Rozumně nemůžete učiniti jedno ani druhé; rozumně nemůžete hájiti z obojího nic.“

Pascal, Myšlenky, 233

A – Bůh existuje,
c – praktikované náboženství, mravný život,
d – věčný život.

Předpoklady: $\mathrm{P}(A) > 0$, $d = \infty$

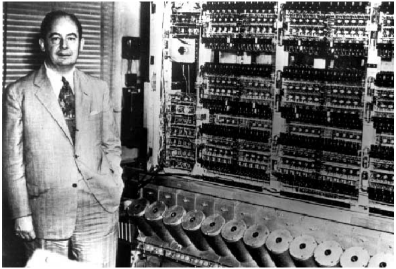
$$\mathrm{E}V = \infty \cdot \mathrm{P}(A) - c = \infty > 0$$

Hra

Hra dvou hráčů v normálním tvaru:
čtveřice $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$, kde X, Y jsou konečné množiny a u, v jsou funkce $X \times Y \to \mathbb{R}$.

Množina X,resp. Y …*množina strategií prvního, resp druhého, hráče.*

Funkce u, resp. v…*výplatní funkce prvního, resp. druhého, hráče.*



Hra

Bimaticová hra

Nechť

$$X = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad Y = \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$a_{ij} = u(i, j) \qquad b_{ji} = v(i, j)$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Hra

Bimaticová hra

Nechť

$$X = \{1, 2, \dots, n\} \qquad Y = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$a_{ij} = u(i, j) \qquad b_{ji} = v(i, j)$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

S tímto označením dostaneme

$$u(i, j) = a_{ij} = \boldsymbol{e}_i^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{e}_j, \qquad v(i, j) = b_{ji} = \boldsymbol{e}_j^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{e}_i.$$

Matice A, B …*výplatní matice.*

$$\mathcal{G} = (X, Y, u, v) = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$$

Hra

Bimaticová hra

Hru lze vyjádřit tabulkou

		hráč 2			
		1	2	$\dots$	m
hráč 1	1	b_{11} a_{11}	b_{21} a_{12}	$\dots$	b_{m1} a_{1m}
	2	b_{12} a_{21}	b_{22} a_{22}	$\dots$	b_{m2} a_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	b_{1n} a_{n1}	b_{2n} a_{n2}	$\dots$	b_{mn} a_{nm}

Hra

Bimaticová hra

Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$:

čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$;

$X^* = S_n$, $Y^* = S_m$,
u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x}.$$

X, Y … čisté strategie

X^*, Y^* … smíšené strategie

Hra

Bimaticová hra

Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$:

čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$;

$X^* = S_n$, $Y^* = S_m$,
u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathrm{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathrm{B} \boldsymbol{x}.$$

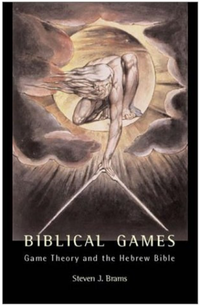
X, Y … čisté strategie

X^*, Y^* … smíšené strategie

$\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*) = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$

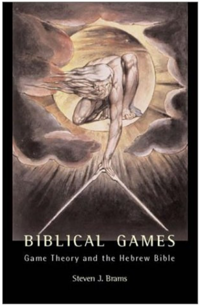
Populární hry

„Víra a zjevení“



Populární hry

„Víra a zjevení“



Populární hry

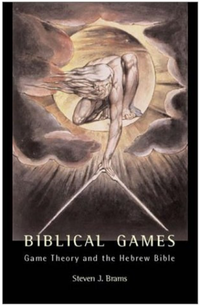
„Víra a zjevení“

Bůh

		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří		
	nevěří		

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

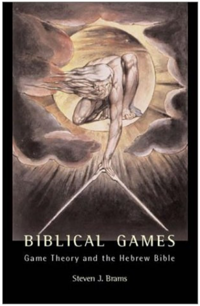
„Víra a zjevení“

Bůh

		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří		4
	nevěří		

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

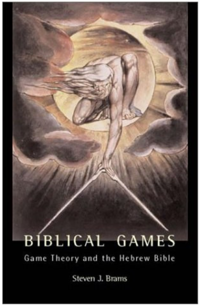
„Víra a zjevení“

Bůh

		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3	4
	nevěří		

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

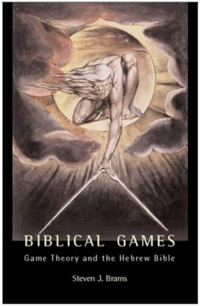
„Víra a zjevení“

Bůh

		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3	4
	nevěří		2

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



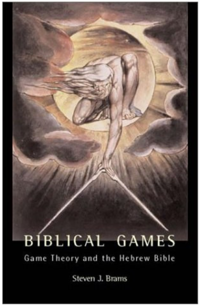
Populární hry

„Víra a zjevení“

		Bůh	
		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3	4
	nevěří	1	2

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

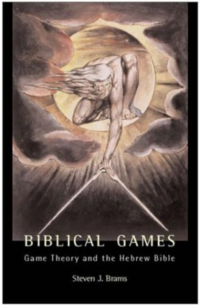
„Víra a zjevení“

Bůh

člověk		zjevuje se	je skrytý
	věří	3 4	4
	nevěří	1	2

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

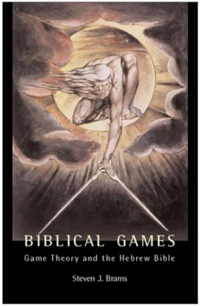
„Víra a zjevení“

Bůh

člověk		zjevuje se	je skrytý
	věří	3 4	4
	nevěří	1	2 3

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

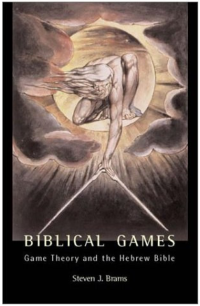
„Víra a zjevení“

Bůh

		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3 4	4 2
	nevěří	1	2 3

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



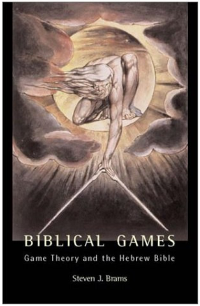
Populární hry

„Víra a zjevení“

		Bůh	
		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3 4	4 2
	nevěří	1 1	2 3

Preference:

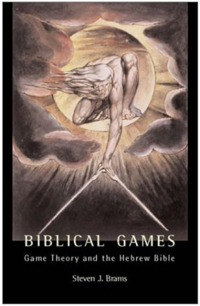
	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

„Víra a zjevení“

		Bůh	
		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3 4	4 2
	nevěří	1 1	2 3



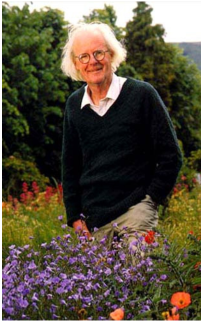
Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit

Z předpokladu, že se Bůh chová racionálně, plyne, že člověk udělá nejlépe, když v tohoto Boha nebude věřit.

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

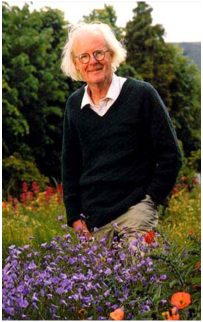


John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb		
holubice		



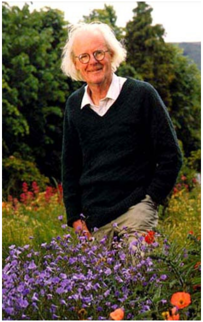
John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb		
holubice		

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt



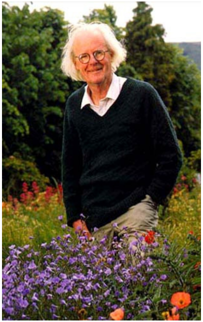
John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	
holubice		

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt



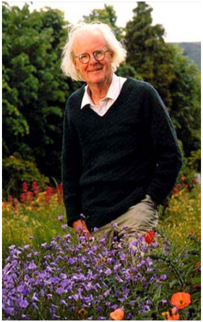
John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	
holubice		$\frac{1}{2}V$

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt



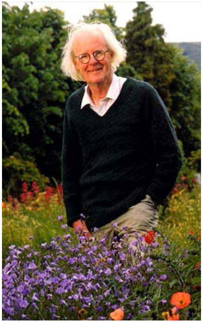
John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	V
holubice		$\frac{1}{2}V$

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt



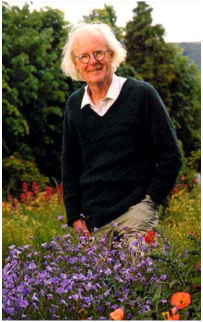
John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	V
holubice	0	$\frac{1}{2}V$

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt



John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

Strategie hledání partnera

Ještěrka *Uta stansburniana*

				
velké teritorium, několik samic		0	wins	loses
teritorium s jednou samicí		loses	0	wins
nemá teritorium		wins	loses	0

Populární hry

Strategie hledání partnera

Kámen-nůžky-papír

			
	0	wins	loses
	loses	0	wins
	wins	loses	0

Populární hry

Strategie hledání partnera

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	1	−1
Nůžky	−1	0	1
Papír	1	−1	0

Populární hry

Strategie hledání partnera

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	1	-1
Nůžky	-1	0	1
Papír	1	-1	0

Rovnováha: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Populární hry

Boj pohlaví (the battle of sexes)

Účastníci	Strategie	
♂	věrný (faithful)	záletník (philanderer)
♀	zdrženlivá (coy)	rychlá (fast)

Richard Dawkins

Populární hry

Boj pohlaví (the battle of sexes)

Účastníci	Strategie	
♂	věrný (faithful)	záletník (philanderer)
♀	zdrženlivá (coy)	rychlá (fast)

V – hodnota potomka
$2C$ – rodičovská investice
c – náklady na svatbu (cost of engagement period)

Richard Dawkins

Populární hry

Boj pohlaví (the battle of sexes)

Účastníci	Strategie	
♂	věrný (faithful)	záletník (philanderer)
♀	zdrženlivá (coy)	rychlá (fast)

V – hodnota potomka
$2C$ – rodičovská investice
c – náklady na svatbu (cost of engagement period)

Richard Dawkins

		♀	
		coy	fast
♂	faithful	$V-C-c$ $V-C-c$	$V-C$ $V-C$
	philanderer	0 0	$V-2C$ V

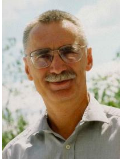
Populární hry

Boj pohlaví (the battle of sexes)

Účastníci	Strategie	
♂	věrný (faithful)	záletník (philanderer)
♀	zdrženlivá (coy)	rychlá (fast)

V – hodnota potomka
$2C$ – rodičovská investice
c – náklady na svatbu (cost of engagement period)

Peter Schuster



Karl Sigmund

		♀ coy	♀ fast
♂	faithful	$V-C-c$ $V-C-c$	$V-C$ $V-C$
♂	philanderer	0 0	$V-2C$ V

MASARYKOVA
UNIVERZITA