

6. Nejistota

E3101 Úvod do matematického modelování



Analýza neurčitosti
Analýza citlivosti

Neurčitost v matematickém modelování



- **Neurčitost** chápeme jako vlastnost systému, který nelze přesně matematicky popsat nebo kdy matematický popis neumožňuje dostatečně přesně predikovat jeho budoucí chování.
- Zdrojem neurčitosti je nedostatek informací. Informace, ze kterých při tvorbě modelu vycházíme, mohou být nekompletní, vzájemně si odporující, nespolehlivé, vágní nebo jinak nedostačující.
- Neurčitost lze rozdělit do následujících kategorií:
 - neurčitost v matematickém popisu modelu,
 - Neurčitost v datech,
 - neurčitost v aplikaci modelu.

Neurčitost v matematickém modelování



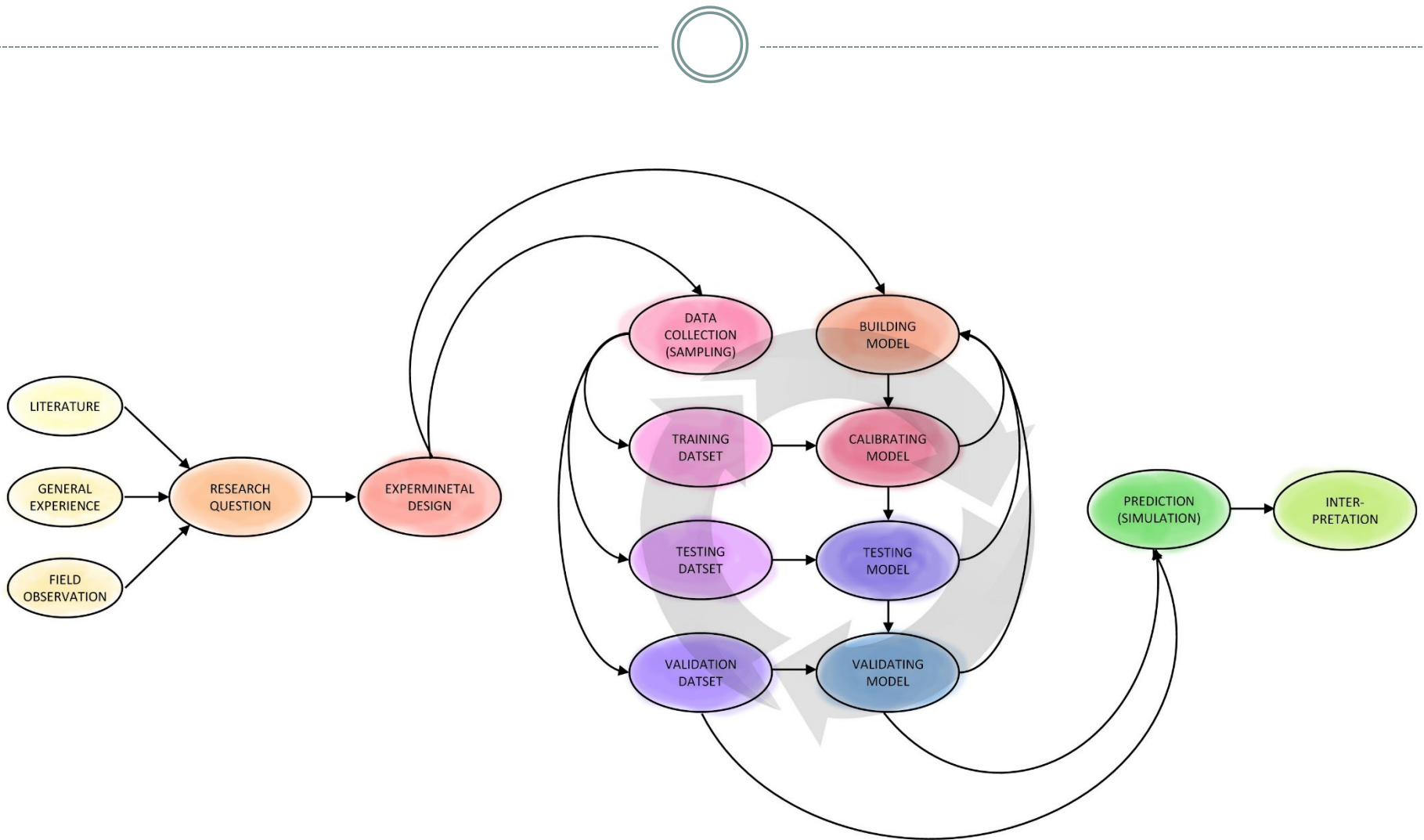
- **Neurčitost v matematickém popisu modelu** je výsledkem nedostatečné znalosti chování modelovaného systému, neúplných exaktních dat, či zjednodušení, které bylo nutné provést pro matematický popis. Také bývá označována jako strukturální (konstrukční) chyba, konceptuální chyba, neurčitost v konceptuálním modelu, nebo chyba/neurčitost modelu
- **Neurčitost v datech** je způsobena chybami měření, nepřesností analytických metod a omezeným množstvím vzorků při sběru a zacházení s daty. Datovou neurčitost někdy nazýváme odstranitelnou neurčitostí, neboť je možné ji dalším studiem (měřeními) minimalizovat. Speciálně pro tento druh neurčitosti používáme v češtině termín nejistota.
- **Neurčitost v aplikaci modelu** vyjadřuje neurčitost (chybu), která vznikne použitím modelu. V tomto případě se jedná zejména o řešení matematických rovnic popisujících model pomocí nástrojů ICT. Typicky jde o chyby v numerické reprezentaci, při využití přibližných řešení apod.

Modelování nejistoty (neurčitosti) a rizika



- ***Analýza neurčitosti (nejistoty)*** je proces kvantifikace nejistoty na výstupu modelu v závislosti na nejistotách jak vstupů modelu, tak samotné struktury modelu. Uplatňuje se více technik, např. intervalová aritmetika, fuzzy techniky, pravděpodobnostní analýza.
- ***Analýza citlivosti*** předpokládá, že některé informace jsou náhodné veličiny, nebo že některé procesy jsou popsány náhodnými funkcemi.
 - Lokální analýza citlivosti se zabývá citlivostí výstupu na změny každého ze vstupů samostatně. Obvykle jde o parciální derivaci modelu (pokud lze analyticky zjistit).
 - Globální analýza citlivosti se zabývá celkovou citlivostí modelu na změny vstupů v rámci množiny všech variant vstupů.

Modelování nejistoty (neurčitosti) a rizika



Inverzní problém



- Určení vstupních parametrů modelu, které neznáme, při znalosti výstupních hodnot (naměřených dat).
- Nazývá se inverzní, protože známe výsledek modelovaného procesu, ale neznáme počáteční stav.
- Opakem je dopředný problém, kdy známe vstupy (parametry) a chceme zjistit výstupy (data).
- Data bývají zatížena chybami, které mohou ztěžovat určení parametrů modelu.
- Inverzní problémy jsou typicky špatně postulované (ill-posed).

Příklad



- Uvažujme diskrétní stochastický model z prvního domácího úkolu.
- Budeme znát pouze počty jedinců v prvních deseti generacích a máme odvodit pravděpodobnost se kterou se za časovou jednotku jedinec rozmnoží ($p_B - p_D$).
- Proveďte výpočet v R včetně stanovení 95% intervalu spolehlivosti pro odhad koeficientu růstu r .

Dobře/špatně postulovaný problém



- Well posed \times Ill posed problems.
- Říkáme, že problém je dobře postulovaný pokud splňuje Hadamardovu definici (3 podmínky):
 - existuje řešení problému;
 - toto řešení je jednoznačné;
 - vlastnosti řešení se mění spojitě se vstupními parametry.
- Inverzní problémy jsou typicky špatně postulované, mohou trpět numerickou nestabilitou díky diskretizaci, nepřesnosti v datech apod.
- I když je problém dobře postulovaný, může být stále špatně podmíněný.

Dobře/špatně podmíněný problém



- Well conditioned × Ill conditioned problems.
- Za dobře podmíněný problém považujeme problém s nízkou podmíněností (číslem podmíněnosti), za špatně podmíněný problém považujeme problém s vysokou podmíněností.
- Podmíněnost udává, jak moc závisí změny modelových výstupů na (malých) změnách modelových vstupů.
- Podmíněnost je mírou citlivosti modelu na chyby ve vstupních hodnotách.
- Podmíněnost (číslo podmíněnosti) je definována jako maximální poměr relativní chyby výstupů a vstupů modelu.

Dopředná a zpětná stabilita

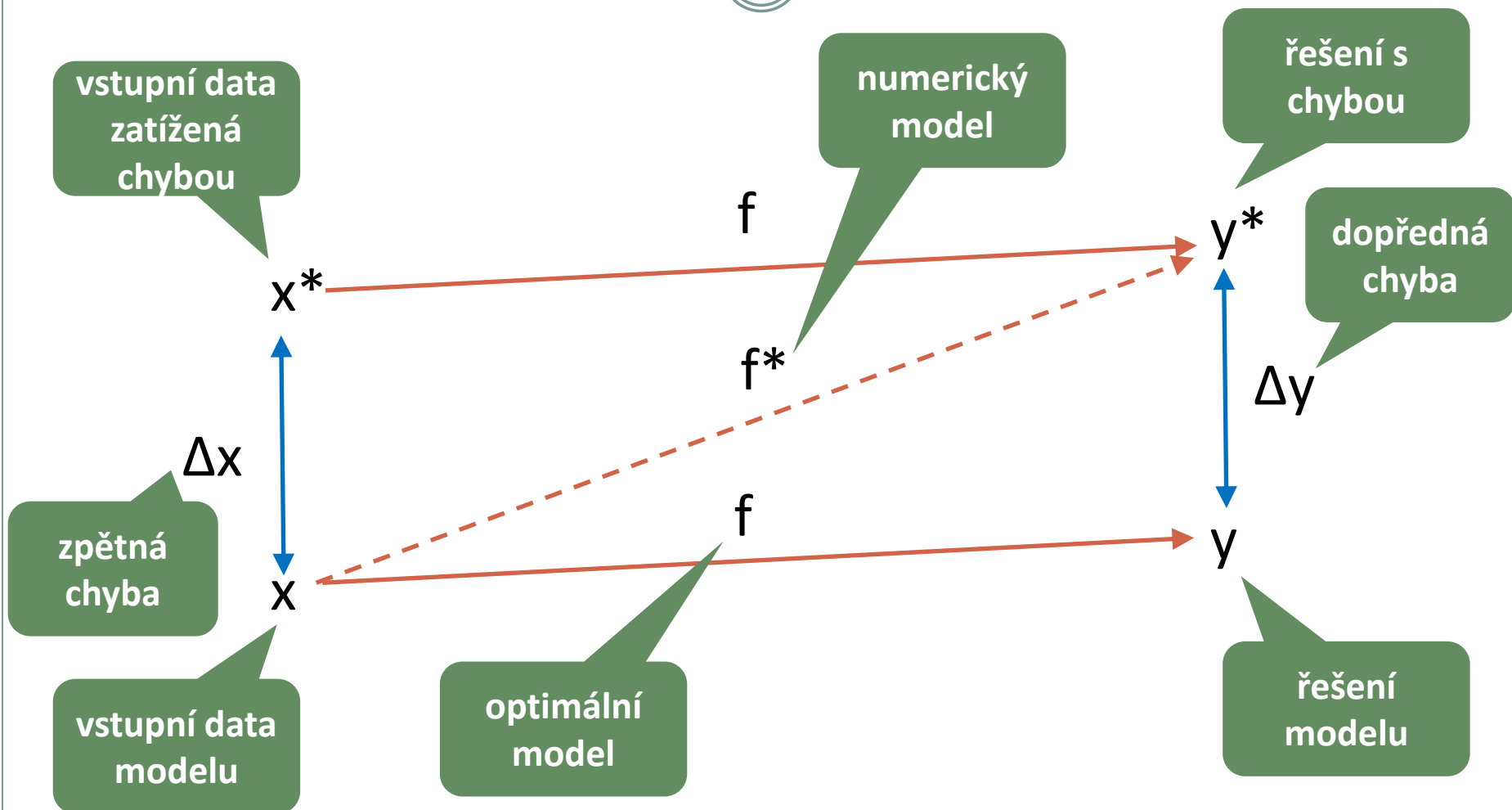


- Výstupy modelu se obvykle mírně liší od popisované reality (díky numerické reprezentaci, tj. zaokrouhlení a nepřesnostem řešení). Chybu výstupů nazýváme dopředná chyba (forward error).
- Odchylka na vstupu modelu, která odpovídá dopředné chybě výstupů se nazývá zpětná chyba (backward error).
- Model nazveme zpětně stabilním (backward stable), pokud má malou zpětnou chybu (obvykle se udává jako relativní vůči vstupní hodnotě):

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right|$$

- „Malá“ chyba obvykle znamená, že je zhruba stejného řádu jako zaokrouhlení vstupních hodnot.

Dopředná a zpětná stabilita



Číslo podmíněnosti



- **Condition number.**
- **Číslo podmíněnosti je vlastností matematického řešení, ne jeho (zaokrouhlovací) chyby.**
- **Jde o maximální poměr relativní zpětné chyby vůči relativní dopředné chybě:**

$$\kappa = \max \left(\frac{\left| \frac{\Delta y}{y} \right|}{\left| \frac{f^{-1}(\Delta y)}{f^{-1}(y)} \right|} \right) = \max \left(\frac{\left| \frac{\Delta y}{y} \right|}{\left| \frac{\Delta x}{x} \right|} \right)$$

$$\kappa = \max \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

Monte Carlo modelování (DÚ 3 do 23. 11. 2023)



- Využijte spojitý deterministický model se zahrnutím úživnosti prostředí (hodnotu úživnosti zvolte dle vlastního uvážení tak, aby $K > 0$).
- Generujte náhodně koeficient porodnosti p_B a koeficient úmrtnosti p_D jako normálně (gaussovsky) rozdělené náhodné veličiny se středy v hodnotách 0,35 a 0,25 a směrodatnou odchylkou 0,05.
- Proveďte 10 000 simulací s počáteční hodnotou $N_0 = 100$ jedinců.
- Vykreslete histogram výsledného počtu jedinců v populaci po 10 generacích.
- Vykreslete časový vývoj velikosti populace (vykreslete všech 10 000 řešení do jednoho grafu, lze využít průhledných čar).