Pravdivostní tabulky

1 Mějme dva výroky p, q. V následující tabulce jsou čtyři řádky a v nich jsou vyznačeny všechny čtyři možné kombinace jejich hodnot. V záhlavích sloupců jsou různé formule s těmito výroky. Zapište do každého řádku a sloupce odpovídající výsledek (0 = nepravda, 1 = pravda):

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg p$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
0	0											
0	1											
1	0											
1	1											

2 Díky tabulce z předchozí úlohy vysvětlete, proč:

1. $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ je totéž jako $p \vee q$; **2.** $\neg(\neg p \vee \neg q)$ je totéž jako $p \wedge q$; **3.** $\neg p \vee q$ je totéž jako $p \Rightarrow q$; **4.** $\neg q \Rightarrow \neg p$ je totéž jako $p \Rightarrow q$.

Prvním dvěma bodům se říká *de Morganovy zákony*, čtvrtému *obměna implikace*.

3 Ať už napíšu jakkoli komplikovanou formuli ze dvou výroků p, q, bude z ní jen další sloupeček v tabulce. Kolika různými způsoby lze takový sloupeček vyplnit nulami a jedničkami? Z toho odvoďte, kolik skutečně různých formulí se dvěma výroky dohromady existuje. Pokud se Vám chce, zkuste podobně určit, kolik existuje skutečně různých formulí s n výroky.

4 Přesvědčte se, že pro dva výroky platí následující:

1. Jejich konjunkce je 0 právě tehdy, když je aspoň jeden z nich 0.
2. Jejich disjunkce je 1 právě tehdy, když je aspoň jeden z nich 1.

Teď postupujte *matematickou indukcí*: předpokládejte, že konjunkce n výroků je 0 právě tehdy, když je aspoň jeden z nich 0, a přidejte k tomu $n+1$-tý výrok. Přesvědčte se, že ten samý popis platí i pro $n+1$ výroků, a tím je dokázáno, že platí pro libovolný počet (aspoň 2). Podobně naložte i s disjunkcí.

5 Použijte charakterisaci konjunkce a disjunkce z minulé úlohy, správně je negujte a přesvědčte se, že de Morganovy zákony platí pro konjunkci a disjunkci libovolného počtu výroků, tj.

1. $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n = \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$; **2.** $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n = \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$.

Slovní hříčky

6 Negujte výroky (bez použití paušálního „není pravda, že“ ☺):

1. Venku svítí slunko a fouká vítr. **2.** Zahraju si šachy nebo dámu. **3.** Každý člověk je smrtelný.
4. Jestliže mě bude sestra provokovat, vypukne sourozenecká rvačka. **5.** Někteří koně jsou černí.
6. Z hospody se ozývá křik „Češi — DO TOHO!“ právě tehdy, když Češi v hokeji vedou.
7. Nikdo neví dne ani hodiny. **8.** Některé kočky jsou takové, že je každý člověk musí pohladit.
9. Jestliže mi někdo nadává, pak se buď urazím a odejdu, nebo mu dám pěstí (ale ne obojí).
10. Každý drak přemůže ovci, někteří draci přemohou rytíře, ale žádný drak nepřemůže krakena.

7 V jakési zemi se na hranicích kontroluje všechno zboží. Mají na to pravidlo: „Je-li na spodku bedny sudé číslo, pak musí být víko červené,“ a cokoli to pravidlo nesplňuje, hned zabaví. Chcete tam dopravit čtyři bedny. Jedna má na spodku číslo 4, druhá tam má 7, třetí má červené víko a čtvrtá černé. Dostanete zprávu, že jedna bedna je označena špatně. Jaký nejmenší počet beden musíte zkontrolovat, abyste si byli jisti, že tu špatnou objevíte? A které bedny to budou?

V následujících úlohách vždy bude dáno několik výroků („pravidel“) a k tomu jeden či více výroků napsaných kursivou („výsledků“). Vaším úkolem bude v každém bodě posoudit, jestli:

1. výrok psaný kursivou přímo vyplývá z ostatních výroků;
2. a jestli výrok psaný kursivou je v rozporu s ostatními výroky.

(To nemusí, ale mohou být dvě různé věci!)

8 Jestliže mi pes sežere důkaz, nedám mu najíst.

1. Pes sežral důkaz. *Pes nedostane najíst.* **2.** Pes nesežral důkaz. *Pes i tak nedostane najíst.* **3.** Pes nedostal najíst. *Pes sežral důkaz.* **4.** Pes dostal najíst. *Pes nesežral důkaz.*

9 Jestliže Pepíček strávil 5 hodin hraním počítačových her, pak si neudělá úkol. Jestliže si Pepíček udělá úkol, pak zvládne test.

1. Pepíček si neudělal úkol. *Pepíček nezvládne test.* **2.** Pepíček si neudělal úkol. *Pepíček strávil 5 hodin hraním počítačových her.* **3.** *Jestliže Pepíček strávil 5 hodin hraním počítačových her, nezvládne test.* **4.** *Jestliže si Pepíček udělal úkol, pak nestrávil 5 hodin hraním počítačových her.*

10 Každé hepo je uho. Některá uho jsou velo. *Některá hepo jsou velo.*

Na potrápení mozku

11 Na 17 kartiček napíšu nejroztodivnější, jakkoli složité formule dvou výroků p, q. Vysvětlete, proč aspoň na dvou kartičkách musí nutně být formule ekvivalentní.

12 Dva vypínače a, b mohou být každý v poloze zapnuto (1) nebo vypnuto (0). Tyto dva vypínače mají ovládat jedinou žárovku (která buď svítí (1), nebo nesvítí (0)) ze dvou míst tak, že přepnutí kteréhokoli vypínače má vždycky (nezávisle na polohách vypínačů a stavu žárovky) za následek i přepnutí žárovky. Napište formuli s výroky a, b, která bude určovat stav žárovky.

13 Ukažte, že každou logickou formuli libovolného počtu výroků lze zapsat jako disjunkci $\vee$ nějakého počtu závorek, z nichž každá obsahuje konjunkci ($\wedge$) zúčastněných výroků a jejich negací. V každé závorce musí být každý výrok právě jednou, buď s negací, nebo bez ní. Například

$$p \Rightarrow q \quad \text{lze zapsat jako} \quad (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Tomuto tvaru se říká *DNF (disjunktivní normální forma)*. Zkuste ho získat tak, že se podíváte na pravdivostní tabulku a zkusíte ji nějak dost otrocky přepsat do formule.

14 Protože každou formuli lze přepsat do DNF, stačí na vyjádření jakékoli formule pouze tři operace $\neg$, $\vee$ a $\wedge$. Vysvětlete, proč $\vee$ ani nepotřebujeme a proč tedy jakoukoli formuli lze zapsat pouze pomocí dvou operací $\neg$ a $\wedge$ *(zkuste de Morganovy zákony)*. Stačila by na totéž dvojice $\neg$ a $\vee$?

15 Když už lze všechny formule zapsat pomocí dvou operací, můžeme se ptát, jestli by se nenašla taková, která by na to stačila sama. Odpověď zní, že by se našla. Dokažte tedy, že jakoukoli formuli lze zapsat pouze s využitím jediné operace:

1. $\tilde{\wedge}$ čili NAND; definujeme ji jako $x \tilde{\wedge} y = \neg(x \wedge y)$;

2. $\tilde{\vee}$ čili NOR; definujeme ji jako $x \tilde{\vee} y = \neg(x \vee y)$.

(Vymyslete, jak s pomocí té jediné operace zapsat $\neg$ a $\wedge$. To už podle minulé úlohy stačí na zapsání čehokoli.)