

Jak kreslit grafy funkcí

I Z druhé strany papíru s předchozími úlohami jsou dvě kolmé osy s pár vyznačenými čísly. Vemte si folii s načmáranou parabolou a položte ji tak, aby znázorňovala následující funkce:

1. x^2 ; 2. $x^2 + 1$; 3. $1 - x^2$; 4. $(x + 1)^2$; 5. $2 - (x - 1)^2$; 6. $\pm\sqrt{x}$; 7. $2 \pm \sqrt{x - 1}$.

Co by bylo potřeba udělat s touto folií, abyste obdrželi funkci 8. $2x^2$? (Nezkoušejte to ale prosím!)

2 Obecně: jestliže znáte graf funkce $f(x)$, jaké s ním musíte udělat operace, abyste dostali funkce:

1. $f(x) + c$; 2. $f(x + c)$; 3. $-f(x)$; 4. $f(-x)$; 5. $af(x)$; 6. $f(ax)$.

(Zde $a > 0$ a c jsou reálné konstanty.)

3 Načrtněte grafy funkcí: 1. $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x-2}$ a $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$; 2. $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{x+1}$ a $\frac{1}{x^2-1}$.

4 Načrtněte grafy funkcí $y = x$ a $y = -x$. Jaký úhel tyto přímky svírají s vodorovnou osou? Pak načrtněte grafy funkcí $y = 2x$ a $y = 3x$.

Kvadratické funkce

5 Opět se chopte folie s parabolou a položte ji na graf na předchozím papíru tak, aby vznikla kvadratická funkce, která: 1. nemá žádný kořen; 2. má dva kořeny; 3. má jeden dvojnásobný kořen (jsou míněny kořeny v reálných číslech).

6 Řešte rovnice: (a pozor: pokud kořeny existují, pak jsou *dva!*)

1. $x^2 = 4$; 2. $(x + 2)^2 = 9$; 3. $-2(x - 1)^2 = -8$; 4. $(x - 3)^2 = -1$.

Jakmile dokážeme přepsat kvadratický trojčlen do tvaru jako v předchozí úloze (tj. $a(x+b)^2 + c$ pro některé a, b, c), je už nalezení kořenů snadné. Teď se ten způsob naučíme. Tomu se říká *doplnění na (úplný) čtverec*.

7 Ověřte si, že se dá psát:

1. $x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 3$; 2. $x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3$; 3. $2x^2 - 4x = 2(x - 1)^2 - 2$;
4. $-x^2 + 3x + 1 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$.

8 Sami zkuste do tohoto tvaru přepsat následující polynomy:

1. $x^2 - 6x + 8$; 2. $-2x^2 + 3x - 5$; 3. $-x^2 - 9$;

9 V rovnici $x^2 + bx + c = 0$ doplňte vlevo na čtverec. Výslednou rovnici pak řešte stejně jako v úloze 6. Napište, kdy přesně má rovnice 0 a kdy 2 reálné kořeny. Měli byste dostat profláklé vzorce ze základní školy.

10 Pokud jste si na minulém papíře nevyřešili úlohu 9, vyřešte si teď aspoň první bod a objevte *Viětovy vztahy* pro kvadratický polynom.

11 Mějme rovnici $x^2 + 2x - 143 = 0$. Ta má kořeny r_1 a r_2 , které neznáte. *Bez počítání kořenů* zjistěte následující:

1. $r_1 + r_2$; 2. $r_1 r_2$; 3. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$; 4. $(r_1 + r_2)^2$; 5. $r_1^2 + r_2^2$; 6. $(r_1 - r_2)^2$.

(*První dva body zjistíte přímo podle Viětových vztahů. Zbylé vykombinujte z prvních dvou.*)

12 Mějme rovnici $x^2 + ax + b = 0$. Z Viětových vztahů získejte součet $r_1 + r_2$ a také čtverec rozdílu $(r_1 - r_2)^2$. Pak můžeme využít toho, že $r_1 = \frac{1}{2}[(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2)] = \frac{1}{2}[(r_1 + r_2) \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2}]$ a zase byste měli dostat známý vztah.

13 S pomocí Viětových vztahů nalezněte dvě čísla, jejichž součet je 19 a součin 60.

Absolutní hodnoty

I4 Nakreslete si graf funkce $|x|$. Potom si nakreslete grafy následujících funkcí:

1. $|x| + |x + 2|$; 2. $|x - 1| - |x + 2|$; 3. $|x| - |x + 1| + 2|x - 1|$.

I5 S pomocí obrázků z předchozí úlohy řešte následující rovnice a nerovnice:

1. $|x| + |x + 2| = 4$; 2. $|x - 1| + |x + 1| = 1$; 3. $|x - 1| - |x + 2| = 2$;
4. $|x| - |x + 1| + 2|x - 1| = 3$; 5. $|x - 1| - |x| + 2|x - 2| < 2$.

Nerovnosti

I6 Řešte kvadratické nerovnice:

1. $x^2 > 0$; 2. $1 - x^2 < 0$; 3. $2x^2 - 3x + 1 < 0$; 4. $x^2 - 5x > -6$.

I7 Řešte následující nerovnosti:

1. $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-2}$; 2. $\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} < 0$; 3. $\frac{x^2(x-2)}{(x+1)^2(x-1)^3} > 0$.