O polynomech obecně

1 Sečtěte polynomy $f(x)+g(x)$; určete stupně $f(x)$, $g(x)$ i součtu:
1. $f(x)=x^4-3x^2+9x-16$; $g(x)=x^3+3x^2+3x+9$;
2. $f(x)=2x^5-3x^4+4x^3-5x^2$; $g(x)=x^4-2x^3+3x^2$.

2 Násobte polynomy $f(x)\cdot g(x)$ a opět určete stupně obou polynomů i jejich součinu:
1. $f(x)=x^2-x+5$; $g(x)=2x-7$; **2.** $f(x)=x^3-x-2$; $g(x)=x^2+x+1$.

3 Dělte polynomy $f(x)/g(x)$. Opět určete stupně obou polynomů, a pokud je podílem polynom, určete i jeho stupeň. **1.** $f(x)=x^5-3x^2+6x-1$, $g(x)=x^2+x+1$;
2. $f(x)=x^7+3x^6-2x^3+3x^2-x+1$, $g(x)=x^4-x+1$.

4 Rozložte na součin: **1.** x^2-1; **2.** x^3+8; **3.** x^4-1; **4.** x^4+1; **5.** x^4+x^2+1.

5 Nechť $f(x)$ je polynom stupně n a $g(x)$ polynom stupně k. Určete obecně, jaký stupeň budou mít polynomy: **1.** $f(x)+g(x)$; **2.** $f(x)\cdot g(x)$; **3.** $f(x)/g(x)$ (za předpokladu, že je to polynom).

6 Dokažte, že dělíme-li polynom $f(x)$ faktorem $x-c$, bude zbytek po tomto dělení roven $f(c)$. *(Dělení můžeme zapsat takto: $f(x)=(x-c)g(x)+r$, kde $g(x)$ je podíl a r zbytek. Položte $x=c$.)*

7 S pomocí předchozí úlohy dokažte, že polynom $f(x)$ má kořen c *právě tehdy, když* je $f(x)$ dělitelné beze zbytku faktorem $x-c$. *(Musíte dokázat oba směry!)*

8 Napsal jsem si důkaz, že každý polynom $f(x)$ může mít nanejvýš tolik rozličných kořenů, kolik je jeho stupeň, ale kočka mi ho nějak rozdrápala a zůstalo z něj jen tohle:

> *Řekněme, že polynom $f(x)$ stupně n by měl $p>n$ rozličných kořenů x_1, $x_2,\ldots,x_p$. Pak musí být dělitelný polynomy .... až $x-x_p$, tzn. $f(x)=(x-x_1)$.. $P(x)$, kde $P(x)$ je nějaký polynom stupně $r\geq 0$. Polynom vlevo má stupeň n, zatímco ten vpravo má stupeň .... $>n$, a to je spor.* ■

Doplňte důkaz tak, aby dával smysl.

9 Dokažte, že pokud se dva polynomy stupně n shodují v $n+1$ bodech, pak musí být úplně stejné. *(Jejich rozdíl je taky polynom stupně n a v bodech, kde se polynomy shodují, má kořeny.)*

10 Ukažte, že pokud má polynom stupně n právě n rozličných kořenů x_1, x_2, až x_n, pak musí jít zapsat ve tvaru

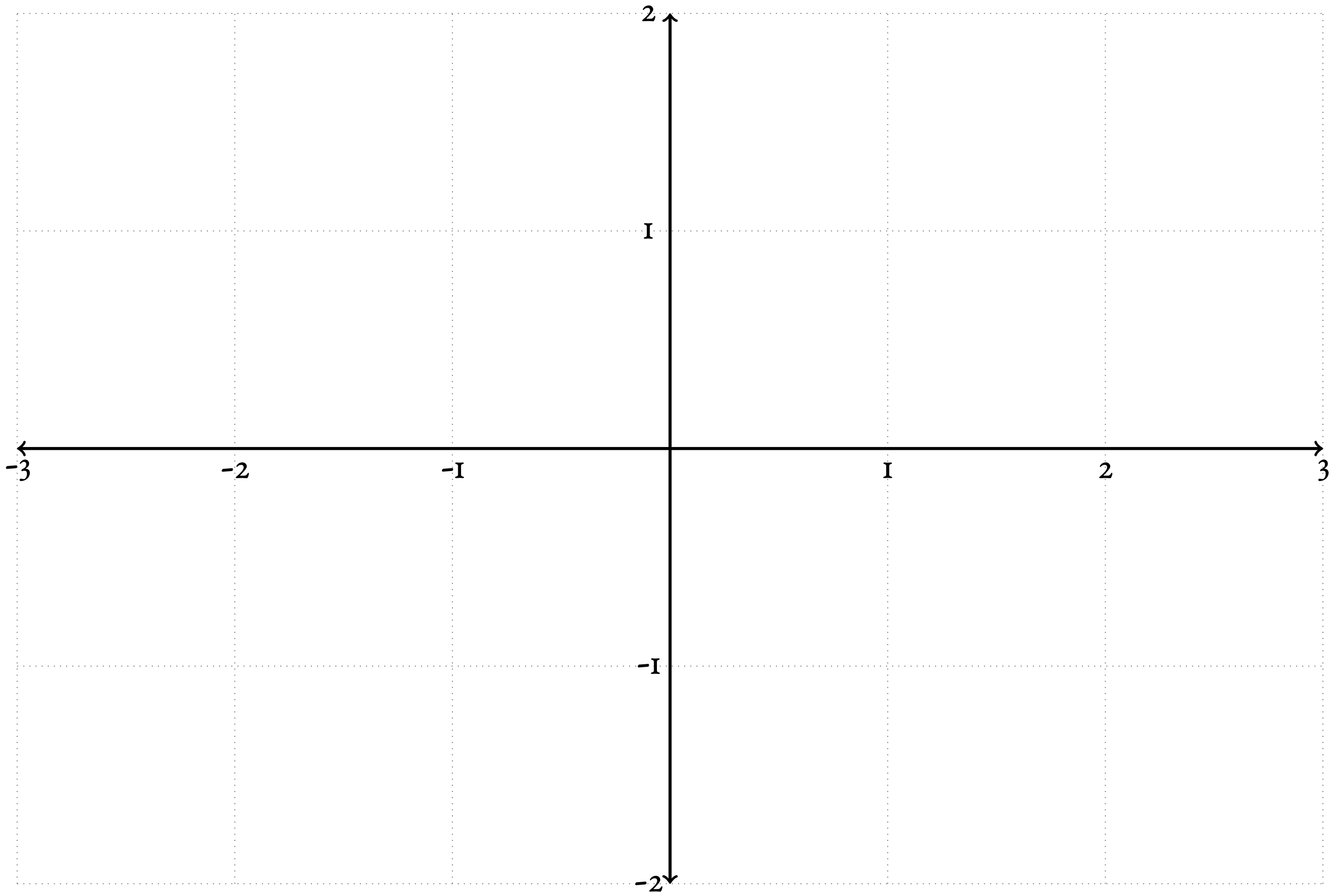
$$a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

kde a je konstanta.

11 S pomocí výsledku předchozí úlohy můžeme přijít na některé docela zajímavé vztahy:
1. Uvažme kvadratický polynom se dvěma kořeny r_1, r_2. Ten se musí dát napsat jako $a(x-r_1)(x-r_2)$. Roznásobením závorek ukažte, že vznikne polynom ax^2+bx+c, kde $-b/a=r_1+r_2$ a $c/a=r_1r_2$.
2. Zkuste totéž s kubickým polynomem s kořeny r_1, r_2, r_3. Napište ho jako $a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$ a roznásobením dostanete ax^3+bx^2+cx+d, kde (doplňte) $-b/a=$......................, $c/a=$...................................... a $-d/a=$.......................
3. Zkuste totéž s obecným polynomem stupně n a kořeny r_1, r_2 až r_n. Po roznásobení dostanete výsledek

$$ax^n-aS_1x^{n-1}+aS_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^kaS_kx^{n-k}+\cdots+(-1)^naS_n.$$

S_k jsou docela hezké funkce kořenů. Řekněte, jak je pomocí nich zapsat. Těmto výrazům, které popisují, jak vypadají koeficienty polynomu v závislosti na jeho kořenech, se říká *Viètovy vztahy*.



2
1
-3
-2
-1
1
2
3
-1
-2