

1 Máte provázek o délce L , jehož konce jsou svázané dohromady. Máte z něj vymežit obdélník o co největší ploše. Jak to uděláte? Jaké budou jeho strany a jaká jeho plocha? (S pomocí Viětových vztahů napište rovnici, jejíž dva kořeny budou strany obdélníka. Protože rovnice musí mít 2 reálné kořeny, musí být $D \geq 0$.)

2 Vytvořte polynom stupně n , který má v zadaných bodech r_1 až r_n kořeny a v bodě r hodnotu 1 .

3 Chceme najít polynom $f(x)$, který by měl stupeň n a v zadaných bodech x_1 až x_{n+1} by měl zadané hodnoty a_1 až a_{n+1} (tj. $f(x_1) = a_1$ atd.)

1. Dokažte, že pokud se takový polynom najde, existuje jen jediný.

2. Vhodně zkombinujte polynomy, které jste vytvořili v předchozí úloze, a utvořte z nich polynom, který bude mít $f(x_1) = a_1$ atd. Z předchozího bodu víte, že to, co jste napsali, je jediný takový polynom. Ten se nazývá *Lagrangeův interpolační polynom*.

4 Jste kapitán(ka) lodě a máte tajnou schránku, která se odemyká kódem (to je celé číslo). Chcete, aby v případě nouze mohli vaši schránku společně odemčít i tři lodní důstojníci, ale aby na to museli být všichni (pokud by některý chyběl, nesmí být schopni ostatní získat o kódu žádnou informaci). Proto se rozhodnete, že uděláte tajný polynom P stupně 2 tak, že váš kód bude $P(0)$.

1. Ukažte, že jsou-li známy hodnoty $P(a), P(b), P(c)$ ve třech různých nenulových bodech a, b, c , je $P(0)$ určeno jednoznačně. (*Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom.*)

2. Ukažte, že pokud budou známy pouze dvě funkční hodnoty $P(a)$ a $P(b)$ ($a \neq b \neq 0$), nelze vůbec nic říci o tom, kolik je $P(0)$. (*Pro každou možnou hodnotu $P(0)$ lze sestavit $L. i. p.$*)

3. Navrhněte, jak s pomocí tajného polynomu „zašifrujete“ kód 547 — napište kódy pro všechny tři důstojníky a vysvětlete, jak je mají zkombinovat, aby Váš kód dohromady získali.

5 Řezník váží maso na rovnoramenných vahách. A protože jsou to váhy staré a blbé, nejsou už ani moc rovnoramenné a jedno rameno je o něco delší než druhé. Řezník to ví a jelikož je poctivý, váží maso takto: nejdřív dá maso na levou misku a na pravou dává závaží, pak to udělá obráceně, a výsledky zprůměruje. Určete, jestli tak dostane správnou hmotnost masa. Pokud ne, koho tím šidí? Sebe, nebo zákazníka? ($x + \frac{1}{x} = x - 2 + \frac{1}{x} + 2$. *První tři členy můžete napsat jako čtverec.*)

6 Dvě železnice ve tvaru úsečky se křížují pod pravým úhlem. Na obou železnicích vyjedou ve stejné chvíli z konečných stanic vlaky stálou rychlostí v směrem k průsečíku. Kdy k sobě budou oba vlaky nejbliž a jaká bude tato minimální vzdálenost, jestliže první vlak začíná ve vzdálenosti a od průsečíku, zatímco druhý začíná ve vzdálenosti b ? (*Zkuste doplnit na čtverec v proměnné t (tj. v čase).*)
