Škola úpravy výrazů

V následujících úlohách Vám zkusím představit různé užitečné typy úprav a rovnou poskytnout jednoduché úlohy, na nichž byste si je mohli procvičit. Složitější výrazy pak často můžete upravit tím, že použijete těchto prvků několik po sobě.

1 **Roznásobení.** Mám-li součin součtu s čímkoli jiným, např. $(a+b+c)x$, můžu ho zapsat jako součet, v němž je každý sčítanec postupně násoben tím druhým činitelem. Takže zde by to bylo $ax+bx+cx$. Funguje to pro libovolný počet sčítanců.
1. $(a+b)(c+d)$; **2.** $(a+b)^2$ (tj. $(a+b)(a+b)$); **3.** $(a-b)^2$; **4.** $(a-b)(a-d)-(a+b)(a+d)$; **5.** $(a+b+1)(c+1)+(a+b-1)(1-c)$.

2 **Vytknutí.** Jde o opačný postup k roznásobení: vidím-li například $ax+bx+cx$, můžu x „vytknout" a převést to zpět na součin $(a+b+c)x$. Občas je ale možného vytknutí trochu těžké si povšimnout.
1. $ab+ac-2a$; **2.** $x^2y^3+y^2x^3$; **3.** $x^2+2xy+y^2$ (viz bod 2 předchozí úlohy); **4.** $ab+ac+bd+cd$ (vytkněte zvlášť z prvních a druhých dvou); **5.** $xy^3+yx^3+2x^2y^2$.

3 Zkusíme přepsat na součin a^2-b^2. Pomůžeme si trikem: doprostřed přidáme $-ab+ab$. To je nula, takže tím se nic nezmění, ale pak máme $a^2-ab+ab-b^2$. Vytkněte z prvních i druhých dvou členů a třetím vytknutím přepis na součin dokončete.

4 **Krácení ve zlomcích.** Přejdeme k počítání se zlomky. Jelikož zlomek je prostě podíl čitatele a jmenovatele, je jasné, že pokud obojí násobíme týmž číslem, výsledek se nezmění. Proto můžeme stejný *nenulový* činitel v čitateli i jmenovateli odstranit. Třeba můžu psát $\frac{a\cdot b}{a\cdot(c+d)}=\frac{b}{c+d}$ — obou a se můžu zbavit. **To funguje jen pro součiny!!**
1. $\frac{abc}{a(b+c)}$; **2.** $\frac{ab+ac}{bc+c^2}$; **3.** $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$; **4.** $\frac{a^2+2a+1}{a^2-1}$.

5 **Rozšíření ve zlomcích.** Je to opačný proces ke krácení — čitatele i jmenovatele zlomku vynásobíme týmž nenulovým číslem. Upotřebíme ho často při zacházení s odmocninami společně se vztahem pro a^2-b^2 ze čtvrté úlohy. V následujících bodech zkuste „usměrnit zlomky" — odstranit odmocniny ze jmenovatelů.
1. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; **2.** $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$; **3.** $\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$; **4.** $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

6 **Sčítání zlomků.** Důležité je, že bezprostředně sčítat (a odčítat) se smí jen zlomky se stejným jmenovatelem. Pak platí $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Upravte:
1. $\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{1}{a^2-b^2}$; **2.** $\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{b+c}$.
Pokud jsou jmenovatele různé, musíme oba zlomky rozšířit tak, aby se staly stejnými. Třeba takto: sčítáme-li $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$, rozšíříme druhý zlomek dvěma a dostaneme $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}$. Zde už můžeme sečíst, protože jsou jmenovatelé stejní, a dostaneme $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.
3. $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$; **4.** $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$; **5.** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$; **6.** $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}$.

7 **Rozklad zlomku na součet.** Jde o opačný proces ke sčítání. Pokud máme například $\frac{ab+bc}{ab}$, můžeme to rozbít na součet dvou zlomků se stejným jmenovatelem: $\frac{ab}{ab}+\frac{bc}{ab}=1+\frac{c}{a}$. **To NEFUNGUJE se jmenovatelem!!**
1. $\frac{n-1}{n+1}$ (napište $n-1=(n+1)-2$); **2.** $\frac{2n+1}{n-2}$ (zkuste obdobně); **3.** $\frac{1}{n(n+1)}$ (napište $1=(n+1)-n$); **4.** $\frac{1}{(n^2+n+1)(n-1)}$ (využijte toho, že $3=(n^2+n+1)-(n+2)(n-1)$).