

**I** Odpovězte na následující otázky (s pomocí toho, co jsem ukazoval na tabuli):

1. Jedu v autě po prázdné rovné silnici rychlostí  $v = 100 \text{ km h}^{-1}$ , časová derivace rychlosti je  $\frac{dv}{dt} = 10 \text{ km h}^{-1} \text{ min}^{-1}$ . Jak rychle zhruba pojedou za dvě minuty? A jak rychle jsem asi jel před minutou?
2. Odhadněte, čemu se rovná  $\sqrt[3]{28}$ , pokud víte, že  $\sqrt[3]{27} = 3$  a  $d\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3x^{2/3}}$ .
3. Vysvětlete, proč je funkce rostoucí v těch bodech, kde je její derivace kladná, a klesající tam, kde je derivace záporná.
4. Vysvětlete, proč funkce může mít maximum nebo minimum jen tam, kde je derivace rovna nule.
5. Nakreslete schematicky graf nějaké funkce, která v nějakém svém bodě nemá derivaci.
6. Vysvětlete, proč je derivace rovna směrnicí tečny k funkci v daném bodě.

**2** Vypočítejte derivace následujících funkcí — měla by Vám stačit pravidla o derivaci součtu, součinu a podílu.  $a$  a  $b$  jsou reálné konstanty.

1.  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ ;    2.  $(x-a)(x-b)$ ;    3.  $\frac{x - \sin x \cos x}{2}$ ;    4.  $x^2\sqrt{x} - x\sqrt{x^2}$ ;    5.  $(1-\sqrt{x})(1+x)$ ;
6.  $-\frac{x}{2} + \frac{1+x^2}{2} \arctg x$ ;    7.  $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$ ;    8.  $x^2 e^x \sin x$ ;    9.  $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ ;    10.  $\frac{x \ln x}{1+\ln x}$ ;
11.  $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$ ;    12.  $\frac{(1-x)^a}{(1+x)^b}$ .

**3** Na tyto příklady už bude potřeba i řetězové pravidlo (derivace složené funkce):

1.  $\ln \cos x$ ;    2.  $2x - (1-x^2) \ln \frac{1+x}{1-x}$ ;    3.  $\ln(\ln(\ln x))$ ;    4.  $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{\cos 2x}{8}$ ;    5.  $\frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$ ;
6.  $\text{tg}^4 x - 2 \text{tg}^2 x - 4 \ln \cos x$ ;    7.  $\arctg \sqrt{1-x^2}$ ;    8.  $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$ ;
9.  $e^{\sin x + \cos x}$ ;    10.  $2^{\text{tg} x}$ ;    11.  $e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$ ;    12.  $x^{(a^x)} + a^{(x^a)} + a^{(a^x)}$ .

**4** Zkuste také tyto ještě zákeřnější příklady:

1.  $e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}$ ;    2.  $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$ ;    3.  $\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$ ;
4.  $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctg \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \text{tg} \frac{x}{2} \right)$ ;    5.  $\frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ ;
6.  $\frac{\arcsin x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$ ;    7.  $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$ .

**5** Někdy je zapotřebí funkci před derivováním trochu přepsat. V následujících příkladech se to týká mocnin:

1.  $x^x$ . Tady přepište  $x^x = e^{x \ln x}$  a pak derivujte;    2.  $x^{(x^x)}$ ;    3.  $(\sin x)^{\cos x}$ ;    4.  $(\ln x)^{\text{tg} x}$ .

**6** Samozřejmě můžeme derivovat i výrazy obsahující libovolnou funkci. Řekněme, že  $y$  je nějaká funkce  $x$ ; pak můžeme například podle řetězového pravidla psát  $(y^2)' = 2y \cdot y'$  ( $y^2$  se derivuje na  $2y$  a  $y(x)$  je vnitřní funkce, která se derivuje na  $y'$ ). Podobně derivujte i následující výrazy:

1.  $x^2 \cdot y$ ;    2.  $y \sin y$ ;    3.  $e^y/y$ ;    4.  $y^3 + y^2 + y$ .