

Příklad 7.63: Jak se trhá provázek aneb jak je to se setrvačností těles

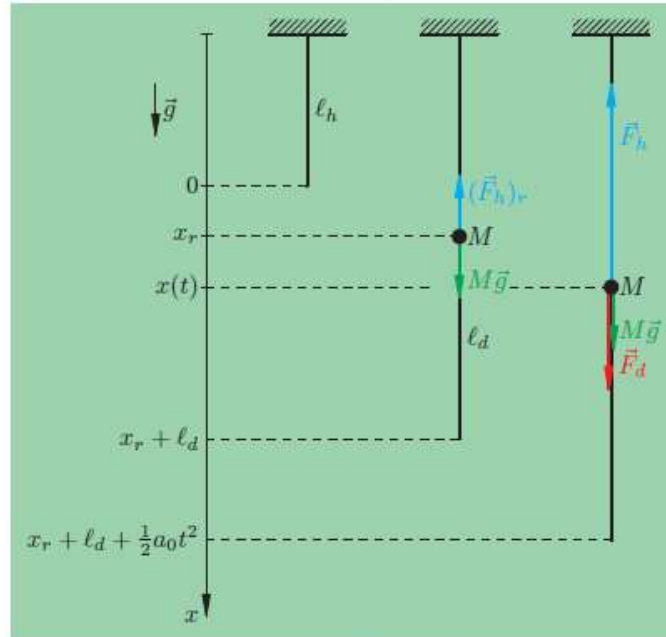
V základních přednáškách z mechaniky se s oblibou ukazuje demonstrační experiment, který se většinou interpretuje jako pokus dokumentující setrvačnost těles. Je uspořádán podle obrázku 7.34 takto: V tíhovém poli Země (tíhové zrychlení \vec{g}) je na provázku zavěšeno poměrně těžké těleso o hmotnosti M . Na jeho spodku visí další provázek, který je volný. Oba provázky jsou stejné kvality — ze stejného klubka. Pokud za dolní provázek táhneme zvětšující se silou „pomalu“, pak při určitém tahu praskne horní provázek. Pokud dostatečně velkou silou dolním provázkem „trhneme“, praskne dolní provázek. Kvalitativně se výsledky tohoto pokusu vysvětlují tak, že jsou způsobeny setrvačností tělesa — „těleso se brání tomu, aby se dalo do pohybu, resp. snaží se zůstat v klidu“. Toto vysvětlení je ovšem velice hrubé, resp. nedostatečné, či dokonce nicneříkající až zavádějící. Pokud by totiž těleso při silovém působení na dolní provázek zůstávalo v klidu, musela by tahová síla \vec{F}_h horního provázku kompenzovat společný účinek tíhové síly $M\vec{g}$ a tahové síly \vec{F}_d dolního provázku, tj. $F_h = Mg + F_d$. Platilo by tedy $F_h > F_d$ a praskl by vždy horní provázek. Známe-li Newtonovy zákony, můžeme chování soustavy přesně popsat, neboť matematický aparát k tomu již máme v podobě teorie i praxe diferenciálních rovnic připravený.

Popíšeme chování provázku. Ve skutečnosti není tuhý, ale chová se jako pružina. Zavěšením tělesa nebo působením jiné síly se jeho délka mění. Označme tedy délky horního a dolního provázku v nenapjatém stavu jako ℓ_h a ℓ_d . Pružné vlastnosti provázku popíšeme pomocí tahové síly, která vznikne v provázku při jeho prodloužení (nebo zkrácení) o $\Delta\ell$. Budeme předpokládat, že tato síla se řídí Hookeovým zákonem. Její velikost je tedy přímo úměrná relativní změně délky provázku a síla míří vždy proti změně délky. Zvolme vektor \vec{x}^0 souhlasně rovnoběžný s tíhovým zrychlením. Bude-li na dolním konci provázku zavěšeno těleso, bude na ně provázek působit silou

$$\vec{F} = -k \frac{\Delta\ell}{\ell} \vec{x}^0,$$

kde k je konstanta (v newtonech). V případě, že se provázek prodlouží, je $\Delta\ell > 0$ a pružná síla je nesouhlasně rovnoběžná s vektorem \vec{x}^0 , při zkrácení provázku, kdy je $\Delta\ell < 0$, je síla s vektorem \vec{x}^0 rovnoběžná souhlasně. (Stejně velkou a opačně orientovanou silou $-\vec{F}$ bude provázek působit na horní závěs.) Zvolíme osu x rovněž

orientovanou směrem dolů, takže vektor \vec{x}^0 bude určovat její kladnou orientaci. Počátek osy x umístíme na konec volně visícího horního provázku, tj. v situaci, kdy jsme na něj ještě nezavěsili těleso. Volba je zřejmá z obrázku 7.34. V první části obrázku je zakreslen pouze volně visící horní provázek a volba osy x včetně volby jejího



Obr. 7.34 Trhání provázku.

počátku. Druhá část znázorňuje těleso zavěšené na horním provázku v klidu, dolní provázek je nezatížen. V této situaci je působení tíhové síly $M\vec{g}$ kompenzováno působením tahové síly horního provázku $(\vec{F}_h)_r = -k \frac{x_r}{\ell_h} \vec{x}^0$. Těleso je ve statické rovnovážné poloze x_r . Platí

$$M\vec{g} + (\vec{F}_h)_r = \vec{0} \implies x_r = \frac{Mg\ell_h}{k}.$$

Ve třetí části obrázku je zachycena obecná poloha tělesa $x(t)$ za předpokladu, že na konec dolního provázku působíme další silou \vec{F}_d . Pro její časový průběh musíme zvolit vhodný model, který i když bude dost jednoduchý, abychom mohli snadno vyřešit pohybovou rovnici tělesa, umožní vystihnout rozdíl mezi „pomalým tahem“ nebo „trhnutím“. Zvolme představu, že dolní konec dolního provázku se pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením $\vec{a}_0 = a_0 \vec{x}_0$. Ještě než sestavíme pohybovou rovnici tělesa, uvědomme si, jaké jsou okamžité délky provázků, je-li těleso v obecné poloze x . Budeme to potřebovat při vyjádření tahových sil provázků. Délka horního provázku je jednoduše $(x + \ell_h)$, jeho prodloužení je tedy přímo rovno souřadnici x , $\Delta\ell_h = x$. Souřadnice dolního konce dolního provázku v situaci, kdy je právě ještě nezatížený, tj. v okamžiku $t = 0$, je $(x_r + \ell_d)$. V okamžiku t je již dolní konec dolního provázku posunut o $\frac{1}{2}a_0t^2$, má tedy souřadnici $(x_r + \ell_d + \frac{1}{2}a_0t^2)$. Horní konec dolního provázku má však v tomto okamžiku souřadnici x . Délka dolního provázku v okamžiku t je rovna rozdílu souřadnic jeho dolního a horního konce, tj. $x_r + \ell_d + \frac{1}{2}a_0t^2 - x$. Prodloužení dolního provázku je tedy $\Delta\ell_d = x_r - x + \frac{1}{2}a_0t^2$.

A nyní již sestavme pohybovou rovnici tělesa. Kromě tíhové síly $M\vec{g}$ na ně působí tahové síly horního a dolního provázku, \vec{F}_h a \vec{F}_d . Označíme-li zrychlení tělesa jako \vec{a} , můžeme zapsat druhý Newtonův zákon ve tvaru

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_h + \vec{F}_d.$$

Pro tahové síly provázků platí

$$\vec{F}_h = -\frac{k}{\ell_h} x \vec{x}^0, \quad \vec{F}_d = \frac{k}{\ell_d} \left(x_r - x + \frac{1}{2} a_0 t^2 \right) \vec{x}^0.$$

Pohyb se podle předpokladu odehrává pouze ve směru osy x , takže můžeme psát

$$M\ddot{x} = Mg - \frac{k}{\ell_h} x + \frac{k}{\ell_d} \left(x_r - x + \frac{1}{2} a_0 t^2 \right).$$

Po dosazení $x_r = \frac{Mg\ell_h}{k}$ a úpravou na normovaný tvar dostaneme diferenciální rovnici druhého řádu

$$\ddot{x} + \frac{k}{M} \left(\frac{1}{\ell_h} + \frac{1}{\ell_d} \right) x = g \left(1 + \frac{\ell_h}{\ell_d} \right) + \frac{ka_0}{2M\ell_d} t^2.$$

Tato rovnice je nehomogenní, s pravou stranou tvaru polynomu druhého stupně,

$$f(t) = P_2(t) = g \left(1 + \frac{\ell_h}{\ell_d} \right) + \frac{ka_0}{2M\ell_d} t^2.$$

Pro kompletní zadání počáteční úlohy a získání konkrétní časové závislosti polohy tělesa musíme ještě připojit počáteční podmínky. V okamžiku $t = 0$ je podle našeho dřívějšího předpokladu těleso v rovnovážné poloze a má nulovou rychlost. Počáteční podmínky tedy jsou $x(0) = x_r = \frac{Mg\ell_h}{k}$ a $\dot{x}(0) = 0$. Úlohu můžeme řešit oběma dosud popsanými způsoby — buď přímo jako nehomogenní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou (viz odstavec 7.5.2), nebo převodem na soustavu rovnic prvního řádu. První postup by v tomto případě vedl k cíli rychleji, proto jej ponecháváme čtenáři. Proveďte výpočet sami a výsledky porovnejte s těmi, které dostaneme nyní převodem na soustavu rovnic prvního řádu. Označme $x_1(t) = x(t)$ a $x_2(t) = v(t) = \dot{x}(t)$. Pro zjednodušení zápisu dále označme

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \left(\frac{1}{\ell_h} + \frac{1}{\ell_d} \right).$$

Soustava rovnic prvního řádu, kterou při tomto označení z pohybové rovnice tělesa získáme, je

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 + g \left(1 + \frac{\ell_h}{\ell_d} \right) + \frac{ka_0}{2M\ell_d} t^2, \end{aligned}$$

počáteční podmínky jsou $x_1(0) = x_r = \frac{Mg\ell_h}{k}$, $x_2(0) = 0$. Jedná se sice o soustavu nehomogenní, ale poradíme si s ní metodou variace konstant po vyřešení odpovídající soustavy homogenní. Matice soustavy, charakteristická matice a charakteristické kořeny jsou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & -\omega^2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Vlastní vektory matice A dostaneme obvyklým způsobem,

$$\vec{K}_1(A - \lambda_1 E) = \vec{0} \implies (K_{11} \ K_{12}) \begin{pmatrix} -i\omega & -\omega^2 \\ 1 & -i\omega \end{pmatrix} = (0, 0) \implies \vec{K}_1 = (K_{11}, i\omega K_{11}),$$

$$\vec{K}_2(A - \lambda_2 E) = \vec{0} \implies (K_{21} \ K_{22}) \begin{pmatrix} i\omega & -\omega^2 \\ 1 & i\omega \end{pmatrix} = (0, 0) \implies \vec{K}_2 = (K_{21}, -i\omega K_{21}).$$

Volbou $K_{11} = 1$, $K_{21} = 1$ dostáváme bázi vektorů $\vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12})$ a $\vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22})$ pro zápis obecného řešení

$$\vec{x}_1(t) = (1, i\omega) e^{i\omega t}, \quad \vec{x}_2(t) = (1, -i\omega) e^{-i\omega t}.$$

Obecné řešení homogenní soustavy získáme z lineární kombinace těchto vektorů, $\vec{x}_h(t) = C_1 \vec{x}_1(t) + C_2 \vec{x}_2(t)$, tj.

$$\vec{x}_h(t) = (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}),$$

a požadavku, aby složky vektoru $\vec{x}(t)$ byly reálné funkce. Z tohoto požadavku vyplyne omezení volby konstant C_1 a C_2 , konkrétně $C_2 = C_1^*$. Zvolíme-li $C_1 = \frac{a}{2} - i\frac{b}{2}$, kde a a b jsou libovolná reálná čísla, dostaneme pro obecné řešení nijak nepřekvapující vyjádření

$$\vec{x}_h(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_h(t), v_h(t)) = (a \cos \omega t + b \sin \omega t, -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t).$$

Partikulární řešení $\vec{x}_p(t)$ nehomogenní soustavy získáme variací konstant a a b , tj. nahradíme je funkcemi $A(t)$ a $B(t)$ a požadujeme, aby rovnice nehomogenní soustavy byly splněny. Dostaneme rovnice (výpočet do detailů proveďte)

$$\dot{A} \cos \omega t + \dot{B} \sin \omega t = 0, \quad -\omega \dot{A} \sin \omega t + \omega \dot{B} \cos \omega t = P_2(t) = P + Qt^2,$$

kde jsme pro zkrácení označili koeficienty polynomu $P_2(t)$ jako P a Q . Osamostatněním \dot{A} a \dot{B} z posledních dvou rovnic a integrací dostaneme nakonec

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \left(-\frac{P}{\omega} \sin \omega t - \frac{Q}{\omega} t^2 \sin \omega t \right) dt, \\ B(t) &= \int \left(\frac{P}{\omega} \cos \omega t + \frac{Q}{\omega} t^2 \cos \omega t \right) dt, \\ A(t) &= \left(\frac{P}{\omega^2} - \frac{2Q}{\omega^4} + \frac{Qt^2}{\omega^2} \right) \cos \omega t - \frac{2Qt}{\omega^3} \sin \omega t + A_0, \\ B(t) &= \left(\frac{P}{\omega^2} - \frac{2Q}{\omega^4} + \frac{Qt^2}{\omega^2} \right) \sin \omega t + \frac{2Qt}{\omega^3} \cos \omega t + B_0, \end{aligned}$$

kde A_0 , B_0 jsou integrační konstanty. Vzhledem k tomu, že můžeme použít jakékoli partikulární řešení nehomogenní soustavy, položíme $A_0 = B_0 = 0$. Obecné řešení nehomogenní soustavy je

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) = ((a + A(t)) \cos \omega t + (b + B(t)) \sin \omega t, -\omega(a + A(t)) \sin \omega t + \omega(b + B(t)) \cos \omega t).$$

Dále uplatníme počáteční podmínky. Dostaneme (dosadíme-li do zlomku $\frac{P}{\omega^2}$ za P a ω^2 , vyjde $\frac{P}{\omega^2} = \frac{Mg\ell_h}{k}$)

$$a + A(0) = \frac{Mg\ell_h}{k} \implies a = \frac{Mg\ell_h}{k} - \left(\frac{P}{\omega^2} - \frac{2Q}{\omega^4} \right) = \frac{2Q}{\omega^4}, \quad \omega b + \omega B(0) = 0 \implies b = 0.$$

Dosazením za a a b a dalšími úpravami nakonec zjistíme, že řešením počáteční úlohy je funkce

$$x(t) = \frac{2Q}{\omega^4} \cos \omega t + \left(\frac{Mg\ell_h}{k} + \frac{Qt^2}{\omega^2} - \frac{2Q}{\omega^4} \right).$$

Pokud jste důsledně provedli všechny výpočty, vidíte, že použití převodu na soustavu rovnic prvního řádu a nalezení jejího partikulárního řešení metodou variace konstant bylo v tomto případě mnohem pracnější než přímé řešení rovnice druhého řádu a zjištění partikulárního řešení metodou neurčitých koeficientů (předpoklad hledaného řešení ve tvaru polynomu druhého stupně).

Vyjádríme ještě tahové síly horního a dolního provázku (jde o jejich x -ovou složku, ostatní složky jsou nulové):

$$F_h(t) = -Mg - \frac{ka_0}{2(\ell_h + \ell_d)} t^2 - \frac{2Qk}{\ell_h \omega^4} (\cos \omega t - 1),$$

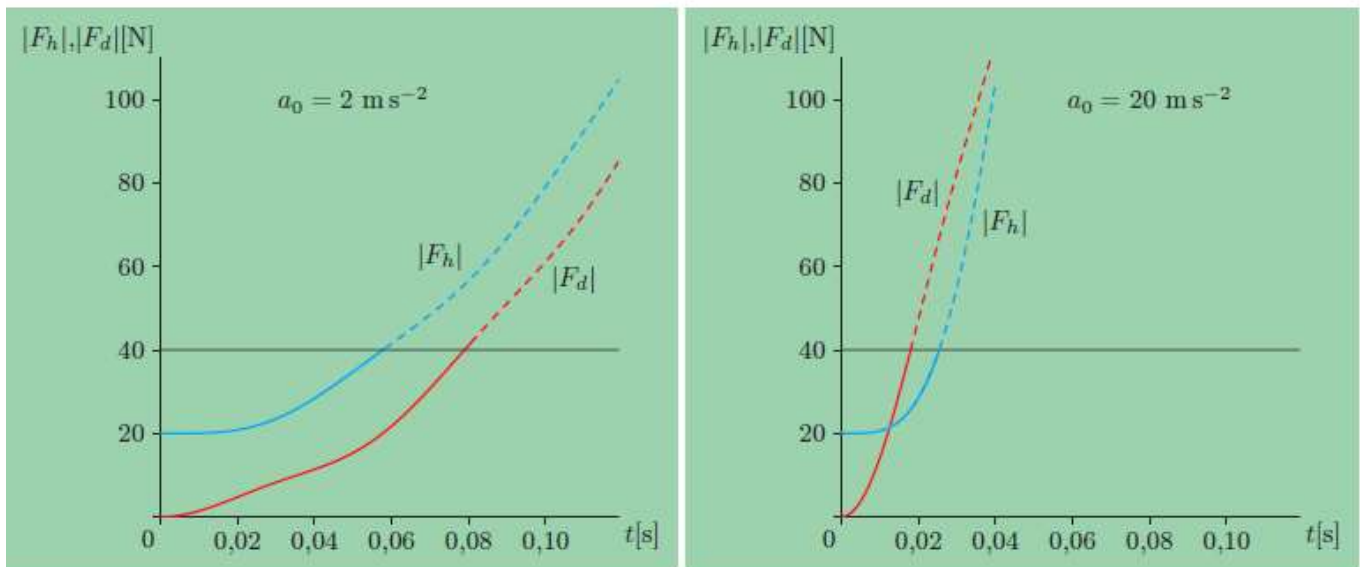
$$F_d(t) = \frac{ka_0}{2(\ell_h + \ell_d)} t^2 - \frac{2Qk}{\ell_d \omega^4} (\cos \omega t - 1).$$

Po zpětném dosazení za Q a trpělivé úpravě je nakonec vyjádříme nakonec pomocí původně zadaných charakteristik soustavy ve tvaru

$$F_h(t) = -Mg - \frac{ka_0}{2(\ell_h + \ell_d)} t^2 - Ma_0 \frac{\ell_h \ell_d}{(\ell_h + \ell_d)^2} (\cos \omega t - 1),$$

$$F_d(t) = \frac{ka_0}{2(\ell_h + \ell_d)} t^2 - Ma_0 \left(\frac{\ell_h}{\ell_h + \ell_d} \right)^2 (\cos \omega t - 1).$$

Tyto vztahy jsou docela komplikované, ale rychlou orientační kontrolou, opravňující důvěru v jejich správnost, snadno provedeme. Z experimentu plyne, že v čase $t = 0$, kdy je těleso v rovnovážné poloze $x(0) = x_r$ a má nulovou rychlost, musí být tahová síla horního provázku rovna $F_h(0) = -Mg$ a tahová síla dolního provázku nulová, $F_d(0) = 0$. Dosazením $t = 0$ do časových závislostí těchto sil zjistíme, že tomu tak opravdu je. Průběh velikostí tahových sil $|F_h|$ a $|F_d|$ je znázorněn na obrázku 7.35 pro hodnoty $M = 2 \text{ kg}$, $\ell_h = 0,3 \text{ m}$, $\ell_d = 0,2 \text{ m}$,



Obr. 7.35 K příkladu 7.63 — tahové síly provázků.

$k = 3 \text{ kN}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ a pro dvě hodnoty zrychlení a_0 , konkrétně $a_0 = 2 \text{ m s}^{-2}$ (obrázek vlevo — „pomalý“ tah) a $a_0 = 20 \text{ m s}^{-2}$ (obrázek vpravo — „trhnutí“). Vztahy pro tahové síly platí samozřejmě pouze do okamžiku, než některý z provázků praskne, tj. než velikost tahové síly v něm překročí mez pevnosti. Pro náš příklad jsme zvolili mez pevnosti $F_p = 40 \text{ N}$. Jak pokus dopadne, z grafů přímo vidíme. Při pomalém tahu praskne nejprve horní provázek, při trhnutí dolní.