Základní matematické metody ve fyzice 1

Základní pravidla pro derivování

- polynom

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0 \qquad \left[(5x^3-3x)'=15x^2-3\right]$$

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

- mocnina $f(x)=x^r,\ r\in R,\ x>0,\ f'(x)=rx^{r-1}$ $\left[\left(\sqrt[5]{x^2}\right)'=\left(x^{2/5}\right)'=\frac{2}{5}x^{-3/5}\right]$

- goniometrické funkce, $a=\text{konst.}\neq 0$

$$(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x,\ (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sin ax)'=a\cos xa,\ (\cos x)'=-a\sin xa,\ (\tan ax)'=\frac{a}{\cos^2 ax},\ (\cot x)'=-\frac{a}{\sin^2 ax}$$

- exponenciální funkce $f(x)=a^x,\ a>0$ $\left[\left(5^{-3x}\right)'=-3\cdot 5^{-3x}\ln 5\right]$

$$f'(x)=a^x\ln a,\ (e^x)'=e^x\ ...(\ln e=1),\ (a^{bx})'=ba^{bx}\ln a$$

- logaritmické funkce $f(x)=\log_a x,\ a>0,\ x>0$ $\left[\left(\log_3\frac{1}{2}x\right)'=\frac{1}{x\ln 3}\right]$

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a},\ \left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}\ ...(\ln e=1),\ \left(\log_a bx\right)'=\frac{1}{x\ln a}$$

- cyklometrické funkce

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\ (\operatorname{arc\,cot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

- derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x),\ a,b=\text{konst.},\ \left(af(x)\pm bg(x)\right)'=af'(x)\pm bg'(x)$$

$$\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ g(x)\neq 0$$

- derivace složené funkce

$$g(x)=f[\varphi(x)],\quad g'(x)=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) \qquad \left[\left(\ln\cos x\right)'=\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=-\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

Základní matematické metody ve fyzice 1

Základní pravidla pro integrování

Funkce $F(x)$ se nazývá *primitivní* k funkci $f(x)$, platí-li $F'(x) = f(x)$. Existuje-li k dané funkci funkce primitivní, pak jich existuje nekonečně mnoho a navzájem se liší i konstantu. Značíme $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$, konstantu nebudeme dále vypisovat.

- polynom

  $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$$

  $$F(x) = \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1} + \frac{1}{n}a_{n-1}x^n + \cdots + \frac{1}{2}a_2 x^2 + a_1 x \quad \left[\int (3x^5 - 8x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{6}x^6 - \frac{8}{2}x^2\right]$$

- mocnina

  $$f(x) = x^r,\ r \in R,\ x > 0,\ F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1},\ \ r \neq -1 \quad \left[\int \sqrt[5]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{2/5}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{7}x^{7/5}\right]$$

- goniometrické funkce, $a = \text{konst.} \neq 0$

  $$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x,\ \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x,\ \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x,\ \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\operatorname{cotan} x$$

  $$\int \sin xa\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax,\ \int \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax,\ \int \frac{1}{\cos^2 ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan ax,\ \int \frac{1}{\sin^2 ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\operatorname{cotan} ax$$

- exponenciální funkce

  $$f(x) = a^x,\ a > 0,\ \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x,\ \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x \ldots (\ln e = 1)$$

  $$\int a^{bx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b\ln a}a^x,\ \int e^{bx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{bx},\ \ b \neq 0$$

- logaritmické funkce $\int \frac{1}{x\ln a} = \log_a x,\ a > 0,\ x > 0 \quad \int \frac{1}{x} = \ln x \ldots (\ln e = 1)$

- cyklometrické funkce

  $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x,\ \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arccos x$$

  $$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x,\ \int \frac{-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,cot} x$$

- substituční metody

  $$\int \varphi'(x) f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}x = f[\varphi(x)],\quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \psi'(t) f[\psi(t)]\,\mathrm{d}t,\ x = \psi(t) \quad \left[\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}\right]$$

- metoda per partes

  $$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \quad \left[\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x(\ln x - 1)\right]$$

- lineární kombinace $\int (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x$