D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

C. OPTIKA

Maxwellovy rovnice v elektroneutrálním nemagnetickém mediu:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\mathbf{P} \qquad \text{Gauss}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \text{(Gauss)}$$
$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{Faraday}$$
$$\nabla\times\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{free}}. \qquad \text{Ampere}$$

0.0 Přepište Maxwellovy rovnice v mediu pomocí elektrické indukce $\mathbf{D}{=}\varepsilon_0\mathbf{E}{+}\mathbf{P}$.

$\left[\nabla\cdot\mathbf{D}{=}0, \nabla\times\mathbf{B}{=}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}{+}\mathbf{J}_{\text{free}}\right]$

0.1 Za předpokladu $\mathbf{P}{=}\varepsilon_0\chi\mathbf{E}$ zaveďte relativní permitivitu prostředí.

$[\mathbf{D}{=}\varepsilon_0(1{+}\chi)\mathbf{E}{\equiv}\varepsilon_0\varepsilon_{\text{r}}\mathbf{E}]$

1. **Mawellovy rovnice.** Uvažujte Maxwellovy rovnice v prostředí s polarizací $\mathbf{P}$ a volným proudem $\mathbf{J}_{\text{free}}$.

   - Ukažte, že vlnová rovnice je důsledkem platnosti Faradayova a Ampérova zákona (s využitím zákona Gaussova).

     $\left[\Delta\mathbf{E}{-}\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}{=}\mu_0\frac{\partial\mathbf{J}_{\text{free}}}{\partial t}{+}\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2}-\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{P})\right]$
   - *Rovinná vlna.* Ukažte, že $\mathbf{E}(\mathbf{r},t){=}\mathbf{E}_0\cos(\mathbf{kr}{-}\omega t)$ je řešením vakuové vlnové rovnice. Z Gaussova zákona v případě izotropního dielektrika ($\nabla\cdot\mathbf{P}{=}0$) ukažte, že $\mathbf{E}_0{\perp}\mathbf{k}$ a z Faradayova zákona dopočítejte $\mathbf{B}(\mathbf{r},t){=}\mathbf{B}_0\cos(\mathbf{kr}{-}\omega t)$.

     $\left[\mathbf{B}_0{=}\frac{1}{\omega}\mathbf{k}{\times}\mathbf{E}_0, \mathbf{E}{\perp}\mathbf{B}{\perp}\mathbf{k}{\perp}\mathbf{E}\right]$
   - *Susceptibilita.* Pro speciální případ izotropního dielektrika ($\mathbf{J}_{\text{free}}{=}0$, $\nabla\cdot\mathbf{P}{=}0$) řešte vlnovou rovnici s využitím předpokladu $\mathbf{E},\mathbf{P}{\approx}\exp(\mathrm{i}(\mathbf{kr}{-}\omega t))$.

     $[\mathbf{P}_0(\omega){=}\varepsilon_0\chi(\omega)\mathbf{E}_0(\omega){:}k{=}(\omega/c)\sqrt{1{+}\chi}]$
   - *Index lomu.* Zaveďte (komplexní) index lomu $n{+}\mathrm{i}\kappa$ prostřednictvím vlnočtu $k{=}n\omega/c$ a zjistěte dopad jeho reálné a imaginární části na šířící se rovinnou vlnu $E{=}E_0\exp(\mathrm{i}(\omega t{-}kx))$.

     $[E{=}E_0\exp(-2\pi\kappa/\lambda_0)\cos(\omega t{-}2\pi nx/\lambda_0)]$

1.1 *Dielektrická funkce.* Nalezněte vzájemné transformační vztahy mezi relativní permitivitou $\varepsilon_{\text{r}}{+}\mathrm{i}\varepsilon_{\text{i}}{=}\chi(\omega){+}1$ a indexem lomu $n{+}\mathrm{i}\kappa$.

$\left[\varepsilon_{\text{r}}{+}\mathrm{i}\varepsilon_{\text{i}}{=}(n{+}\mathrm{i}\kappa)^2{:}\varepsilon_{\text{r}}{=}n^2{-}\kappa^2, \varepsilon_{\text{i}}{=}2n\kappa, n^2{=}\frac{|\varepsilon|{+}\mathrm{Re}\varepsilon}{2}, k^2{=}\frac{|\varepsilon|{-}\mathrm{Re}\varepsilon}{2}\right]$

1.2* *Debyeův rozklad.* Uvažujte rozklad

$$\mathbf{u} = \left[\mathbf{u}_0 + \frac{\lambda}{\mathrm{i}}\mathbf{u}_1 + \left(\frac{\lambda}{\mathrm{i}}\right)^2\mathbf{u}_2 + \dots\right]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\psi\right),$$

kde forma zavedení malého parametru λ reflektuje představu rychle se měnící fáze oproti mnohem pomaleji se měnící amplitudě; všechny složky $\mathbf{u}_j$ v rozvoji amplitudy i fázový člen ψ (nazývaný často *eikonál*) závisí na souřadnicích i čase. Dosaďte uvedený rozvoj do vakuové vlnové rovnice a získejte rovnice jednotlivých aproximací (podle řádu λ). Ukažte, že vlnovou rovnici lze tímto způsobem vyřešit řád po řádu.

$\left[\lambda^{-2}{:}\,(\nabla\psi)^2{-}c^2\dot{\psi}^2{=}0 \text{ rovnice eikonálu}, \lambda^{-1}{:}\,\nabla(I_0\nabla\psi){-}c^2(I_0\dot{\psi})^{\dot{}}{=}0 \text{ rovnice pro přenos intenzity } I_0{=}|\mathbf{u}_0|^2\right]$

2. **Materiálová prostředí**.

2.0* *Plazmová frekvence.* Předpokládejte řídký ionizovaný oblak plynu o prostorové hustotě volných elektronů N. S využitím Gaussovy věty stanovte intenzitu elektrického pole, vzniklou (náhodným) vychýlením elektronového oblaku vůči (takřka nehybným) jádrům a ukažte, že tato situace vede k samovolným oscilacím elektronů o plazmové frekvenci ω_{p}.

$$\left[\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}:\ \omega_{\mathrm{p}}^2=\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\right]$$

2.2 *Drudeho model* pro kovy.

[]

2.1 *Lorentzův model* pro dielektrika. Pro pohyb elektronů o náboji $-e$ v látce předpokládejte model tlumeného oscilátoru ($F_{\mathrm{t}}=-m_{\mathrm{e}}\gamma\dot{x}$) řízeného elastickou silou $F=-Kx$ a buzeného lokálním elektrickým polem; pro jednoduchost předpokládejte, že lokální pole je přímo rovno dopadající světelné vlně $E_0\exp(\mathrm{i}(\omega t-\mathbf{kr}))$. Sestavte pohybovou rovnici pro elektron a nalezněte amplitudu jeho kmitů za předpokladu, že $x=x_0\exp(\mathrm{i}(\omega t-\mathbf{kr}))$.

$$\left[x_0=-\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}\frac{E_0}{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\gamma\omega},\omega_0^2=K/m_{\mathrm{e}}\right]$$

3. **Fermatův princip** postuluje, že mezi dvěma pevně zadanými body se světlo šíří tak, aby celková doba jeho šíření byla minimální.

- *Optická dráha* δ je v homogenním prostředí definována jakou součin indexu lomu n tohoto prostředí a vzdálenosti d, kteou v něm světlo urazilo (ne nutně přímočaře), $\delta=nd$. Při přechodu mezi prostředími je optická dráha aditivní, $\delta=\delta_1+\delta_2+\ldots$ Ukažte, že Fermatův princip je ekvivalentní požadavku minimální optické dráhy během šíření světla.

  $$\left[t_i=\frac{d_i}{c/n_i}\right]$$

- Ukažte, že v homogenním prostředí se Fermatův princip (pro optickou dráhu) redukuje na podmínku přímočarého světla.

  [n=konst]

- Z Fermatova principu pro optickou dráhu vyvoďte pro lom paprsku na rovinném rozhraní dvou homogenních prostředí (n, n') Snellův zákon. Úhly paprsků (α, α') určujte vzhledem k normále k rozhraní. Nalezněte paraxiální aproximaci ($\alpha,\alpha'\to 0$) Snellova zákona.

  [$n\sin\alpha=n'\sin\alpha',\quad n\alpha\doteq n'\alpha'$]

- Ukažte, že při vhodně zvolené znaménkové konvenci pro odražené světlo ($n'<0$, $\alpha'<0$) lze ze Snellova zákona odvodit též zákon odrazu. [$\alpha'=-\alpha$]

3.1∗ *Huygensův-Fresnelův princip.* Ukažte, že pro monochromatický bodový zdroj o vlnové délce λ je možné velikost pole generovaného ve zvoleném bodě spočítat prostřednictvím bodových příspěvků pocházejících z libovolné zvolené vlnoplochy, podmínkou postupu že však je projevení tzv. faktoru sklonu $K(\chi)$, závisejícího na úhlu χ, pod kterým vlnoplochu pozorujeme; hodnotu faktoru sklonu odvoďte pro zjednodušený případ $\chi=0$.

[$K(0)=\mathrm{i}/\lambda$]

4. **Maticový formalizmus**. Uvažujte osově souměrný optický systém, ve kterém paprsek v prostředí o indexu lomu n popíšete pomocí jeho vzdálenosti h od optické osy a směrem šíření $\mathbf{s}$. Vektor $\mathbf{s}$ rozložte do složek podél optické osy (s_z) a kolmo k optické ose (s_x) a předpokládejte $|\mathbf{s}|=n$. Při výpočtech dodržujte standardní znaménkové konvence.

- Ukažte, že v paraxiální aproximaci je možné závislost koncového stavu paprsku $\begin{pmatrix} h' \\ s_x' \end{pmatrix}$ na stavu počátečním $\begin{pmatrix} h \\ s_x \end{pmatrix}$ vyjádřit maticově: pro šíření o osový interval délky d v homogenním prostředí o indexu lomu n a pro lom na rozhraní o poloměru křivosti r mezi prostředími o indexech lomu n a n' příslušné matice nalezněte.

  $$\left[\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix},\varphi=-(n-n')/r \text{ je mohutnost lomivého rozhraní}\right]$$

- V daném místě podél optické osy představuje $\begin{pmatrix} h \\ s_x \end{pmatrix}$ obecný paprsek. Navrhněte speciální volbu parametrů pro význačné typy světelných svazků.

  $\left[\begin{pmatrix} \text{konst} \\ s_x \end{pmatrix} \text{ ohnisko, } \begin{pmatrix} h \\ \text{konst} \end{pmatrix} \text{ rovnoběžný svazek, } \begin{pmatrix} \text{konst} \\ \text{konst} \end{pmatrix} \text{ konkrétní paprsek}\right]$

- Uvažujte obecný optický systém popsaný maticí $\mathbf{M}{=}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ obklopený prostředími o indexech lomu n a n'. Nalezněte podmínku, za které bude systém pracovat jako zobrazující (převádět bodové předměty na bodové obrazy). Využijte skutečnosti, že $\det\mathbf{T}{=}\det\mathbf{R}{=}1$.

  $\left[h' \text{ nezávisí na } s_x\text{:} \quad c{=}{-}a\frac{n'}{t'}{-}d\frac{n}{t}{-}b\frac{nn'}{tt'}, \mathbf{T}'\mathbf{M}\mathbf{T}{=}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ c & 1/\beta \end{pmatrix}, \ \beta \text{ je zvětšení}\right]$

4.1 *Čočka.* Nalezněte matici Φ tlusté čočky (tloušťka t, index lomu n_L, poloměry křivosti stěn r, r'), oddělující prostředí s indexem lomu n a n' a její speciální případy: tlustou čočku ponořenou do prostředí, tenkou čočku a tenkou čočku ponořenou do prostředí. Nalezněte ohniskové vzdálenosti tenké čočky a určete polohu hlavních rovin v tlusté čočce, mají-li pro její ohniskové vzdálenosti platit formálně stejné výrazy jako u čočky tenké.

$$\left[\Phi{=}\begin{pmatrix} 1{-}\varphi_1 t/n_\mathrm{l} & t/n_\mathrm{l} \\ -\varphi & 1{-}\varphi_2 t/n_\mathrm{l} \end{pmatrix}, \varphi{=}\varphi_1{+}\varphi_2{-}\varphi_1\varphi_2 t/n_\mathrm{l}, f{=}{-}n/\varphi, f'{=}n'/\varphi\right]$$

4.2 *Lupa.* Nalezněte zvětšení poskytované lupou o mohutnosti φ_lupa při pozorování neakomodovaným okem. Jak se toto zvětšení změní, když akomodaci připustíme (lupu přiložíme těsně k oku o mohutnosti φ_oko)?

$$[\beta_\mathrm{neakomod}{=}d/f_\mathrm{lupa}, \beta_\mathrm{akomod}{=}\beta_\mathrm{neakomod}{+}1]$$

4.3 *Mikroskop.* Mikroskop je optická soustava dvou spojných čoček - objektivu s mohutností φ_ob a okuláru s mohutností φ_ok, která pracuje jako dvoustupňová lupa: nejprve je objektivem vytvořen skutečný obraz v ohniskové rovině okuláru, který je následně přímo pozorován okulárem coby lupou. Díky tomu lze v mikroskopu pozorovat neakomodovaným okem. Nalezněte zvětšení β_mik mikroskopu, jako parametr použijte tubusovou vzdálenost Δ (mezi obrazovým ohniskem objektivu a předmětovým ohniskem okuláru).

$$\left[\beta_\mathrm{mik}{=}\beta_\mathrm{ob}\beta_\mathrm{ok}{=}\frac{\Delta}{f_\mathrm{ob}}\frac{d}{f_\mathrm{ok}}, \ d \text{ je konvenční zraková vzdálenost}\right]$$

4.4 *Dalekohled.* Uvažujte dvě tenké čočky o mohutnostech φ_ob, φ_ok oddělené vzduchovou mezerou tloušťky l. Pomocí maticového formalismu nalezněte podmínku, za které bude systém pracovat jako hvězdářský dalekohled (čili zobrazovat rovnoběžné svazky na rovnoběžné svazky) a určete zvětšení β takového dalekohledu. Předpokládejte, že objektiv je spojka, okulár může být spojka (Kepler), nebo rozptylka (Galilei). Zkonstruujte chod paprsků oběma typy hvězdářského dalekohledu.

$$[l{=}f_\mathrm{ob}{+}f_\mathrm{ok}, \beta{=}f_\mathrm{ob}/f_\mathrm{ok}]$$

4.5* *Optický zoom.* Objektiv s proměnnou ohniskovou vzdáleností (transfokátor) se v nejjednodušší konfiguraci skládá ze tří skupin o mohutnostech φ_1, φ_2, φ_3, které se všechny mohou nezávisle pohybovat podél optické osy objektivu. Nalezněte vztahy pro polohy jednotlivých členů objektivu v závislosti na požadované celkové mohutnosti objektivu za dodržení podmínky, že transfokace (změna ohniskové vzdálenosti objektivu) nemá vliv na zaostření objektivu.

[]

5. **Fresnelovy vztahy**. Uvažujte rovinné rozhraní mezi dvěma homogenními prostředími o indexech lomu (po řadě) n_1 a n_2. Odrazivosti takového rozhraní pro světlo polarizované v rovině dopadu (p) a kolmo na ni (s) jsou

$$r_\mathrm{p} = \frac{n_2\cos\theta_\mathrm{i} - n_1\cos\theta_\mathrm{t}}{n_2\cos\theta_\mathrm{i} + n_1\cos\theta_\mathrm{t}} \qquad r_\mathrm{s} = \frac{n_1\cos\theta_\mathrm{i} - n_2\cos\theta_\mathrm{t}}{n_1\cos\theta_\mathrm{i} + n_2\cos\theta_\mathrm{t}},$$

přičemž úhel dopadu θ_i a lomu θ_t jsou svázány Snellovým zákonem $n_1\sin\theta_\mathrm{i}{=}n_2\sin\theta_\mathrm{t}$. Pomocí r_s, r_p se zjistí amplitudy odražených vln, $E_\mathrm{rs}{=}r_\mathrm{s}E_0$, $E_\mathrm{rp}{=}r_\mathrm{p}E_0$, kde E_0 je amplituda dopadající vlny. Odražené intenzity světla se zjistí pomocí $R_\mathrm{p}{=}|r_\mathrm{p}|^2$, $R_\mathrm{s}{=}|r_\mathrm{s}|^2$ jako $I_\mathrm{rp}{=}R_\mathrm{p}I_0$, $I_\mathrm{rs}{=}R_\mathrm{s}I_0$, kde $I_0{=}|E_0|^2$ je světelná intenzita dopadající vlny.

Obdobně je možné zavést koeficienty transmise jako $E_{\mathrm{tp}}{=}t_{\mathrm{p}}E_0$, $E_{\mathrm{ts}}{=}t_{\mathrm{s}}E_0$, přičemž

$$t_{\mathrm{p}} = \frac{2n_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}{n_2\cos\theta_{\mathrm{i}} + n_1\cos\theta_{\mathrm{t}}} \qquad t_{\mathrm{s}} = \frac{2n_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}{n_1\cos\theta_{\mathrm{i}} + n_2\cos\theta_{\mathrm{t}}};$$

dále platí $I_{\mathrm{tp}}{=}T_{\mathrm{p}}I_0$, $I_{\mathrm{ts}}{=}T_{\mathrm{s}}I_0$, kde

$$T_{\mathrm{p}} = \frac{n_2\cos\theta_{\mathrm{t}}}{n_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}|t_{\mathrm{p}}|^2 \qquad T_{\mathrm{s}} = \frac{n_2\cos\theta_{\mathrm{t}}}{n_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}|t_{\mathrm{s}}|^2.$$

- Ukažte, že pro obě polarizace platí $R{+}T{=}1$.

- Ukažte, že Fresnelovy vztahy pro reflektivitu lze s využitím Snellova zákona přepsat jako

$$r_{\mathrm{s}} = -\frac{\sin(\theta_{\mathrm{i}} - \theta_{\mathrm{t}})}{\sin(\theta_{\mathrm{i}} + \theta_{\mathrm{t}})} \qquad r_{\mathrm{p}} = -\frac{\tan(\theta_{\mathrm{i}} - \theta_{\mathrm{t}})}{\tan(\theta_{\mathrm{i}} + \theta_{\mathrm{t}})}.$$

- Nalezněte kritický úhel dopadu θ_{c}, pro nějž (a nad nímž) dochází k totálnímu odrazu světla od rozhraní.
$\left[\sin\theta_{\mathrm{c}}{=}\frac{n_2}{n_1},(n_1{\geq}n_2)\right]$

- Pro neabsorbující prostředí nalezněte Brewsterův úhel dopadu θ_{B}, kdy je odražené světlo zcela polarizováno. Ukažte, že při dopadu pod Brewsterovým úhlem je lomený paprsek kolmý k odraženému.
$\left[r_{\mathrm{p}}{=}0{\to}\tan\theta_{\mathrm{B}}{=}\frac{n_2}{n_1}\right]$

- Nalezněte koeficient odrazivosti R v případě (skoro) kolmého dopadu světla na rozhraní a z podmínky $R{+}T{=}1$ také koeficient propustnosti T. Ověřte, že získané vztahy nezávisí na polarizaci dopadajícího světla ani na pořadí prostředí a že platí zjednodušeně $T{=}|t|^2$.
$\left[R{=}\frac{(n_1{-}n_2)^2}{(n_1{+}n_2)^2},T{=}\frac{4n_1n_2}{(n_1{+}n_2)^2}\right]$

5.1 Uvažujte planparalelní desku tloušťky d a indexu lomu n', vnořenou do prostředí o indexu lomu n. Předpokládejte, že na desku dopadá světlo intenzity I_0 pod obecným úhlem dopadu a že na stěnách desky dochází k násobným odrazům.

- ukažte, že paprsky vystupující z desky jsou rovnoběžné s dopadajícím paprskem nezávisle na úhlu dopadu světla

- určete intenzity několika prvních prošlých i odražených paprsků
[]

- V rámci konkrétního výpočtu dále předpokládejte skleněnou destičku ($n'{=}1.5$) ponořenou do vzduchu ($n{=}1$) a skoro kolmý dopad světla. S použitím příslušně zjednodušených Fresnelových vztahů vypočtěte celkovou prošlou (I_{t}) a odraženou (I_{r}) intenzitu světla včetně násobných odrazů a ověřte, že jejich součet je roven I_0.
$\left[I_{\mathrm{t}}{=}\frac{2nn'}{n^2{+}n'^2}I_0\right]$

7. Interference

7.0 Na příkladu dvou koherentních vln demonstrujte rozdíl mezi jejich koherentním a nekoherentním sčítáním.
[]

7.1 *Youngův experiment.* Uvažujte neprůhledný terčík se dvěma úzkými rovnoběžnými šterbinami, vzdálenými d. Na terčík kolmo dopadá rovinná monochromatická vlna (z dalekého monochromatického bodového zdroje). Určete rozložení světla na stínítku rovnoběžném s terčíkem ve vzdálenosti l po směru letu světla; úlohu řešte jako 1D příklad.

[]

7.2 Řešte příklad 5.1 interferenčně: předpokládejte, že deska je tenká a započtěte i fázové členy.

[]

8.1 **Fraunhoferova difrakce**. Předpokládejte difrakci na rovinném terčíku s obecným otvorem Σ. Zdrojem světla je bodový monochromatický zářič S, centrovaný před terčíkem ve vzdálenosti a a difrakci pozorujeme v bodě $P(\xi,\eta)$ na rovinném stínítku rovnoběžném s terčíkem ve vzdálenosti b za ním po směru letu světla. Za zjednodušujícího předpokladu konstantní intenzity světla na terčíku je difrakční příspěvek $\psi(P)$ v bodě P, plynoucí z Huygensova-Fresnelova principu, roven

$$\psi(P) = A \iint_{Q\in\Sigma} \frac{K(\chi)}{SQ \cdot QP} \exp\Big(\mathrm{i}[\omega t - k(SQ + QP)]\Big) d\Sigma,$$

kde $K(\chi){=}\mathrm{i}/\lambda$ je faktor sklonu a A je amplituda zdroje.

- Nalezněte vyjádření difrakčního integrálu v lineární aproximaci terčíkových souřadnic $Q(x,y)$; vzdálenosti QP aproximujte konstantní vzdáleností $r_0{\equiv}Q_0P$ ke středu Q_0 otvoru terčíku.

$$\left[\psi(P) \doteq A_\mathrm{D} \iint_{Q\in\Sigma} \exp\left(\mathrm{i}k\frac{x\xi+y\eta}{r_0}\right) \mathrm{d}\Sigma,\ \ A_\mathrm{D} = \frac{\mathrm{i}}{\lambda ab} \exp\Big(\mathrm{i}[\omega t - k(a+r_0)]\Big)\right]$$

8.1 S využitím Fraunhoferova integrálu vypočtěte difrakci na centrovaném obdélníkovém otvoru o velikosti $p{\times}q$. Určete polohy maxim a šířku centrálního maxima.

$$\left[\psi(\xi,\eta) = A_\mathrm{D} pq \operatorname{sinc}\left(\frac{kp\xi}{2r_0}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kq\eta}{2r_0}\right),\ \ I_{pq} = \psi\psi^*\right]$$

8.2 S využitím Fraunhoferova integrálu spočtěte Youngův experiment realističtěji jako difrakci na centrované dvojici totožných obdélníkových otvorů o velikosti $p{\times}q$, vzdálených od sebe o $d{>}p$ podél osy x.

$$\left[I(\xi,\eta) = 4I_{pq}\cos^2(kd\xi/2r_0)\right]$$

8.3 *Mřížkový faktor.* Demonstrujte, že při difrakci na pravidelně se opakujících otvorech stejného tvaru se výsledná intenzita ve Fraunhoferově přiblížení dá počítat jako součin difrakce na jednom z otvorů (otvorový faktor) a funkce závisející na rozložení otvorů na terčíku (mřížkový faktor). Pro jednoduchost vyjděte z předchozího příkladu a uvažujte M ekvidistantně vzdálených obdélníkových otvorů o velikosti $p{\times}q$.

$$\left[I(\xi,\eta) = I_{pq}\left|\sum_{m=1}^{M} \exp(-\mathrm{i}kdm\xi/r0)\right|^2 = I_{pq}\left(\frac{\sin(kdM\xi/2r_0)}{\sin(kd\xi/2r_0)}\right)^2\right]$$

8.4∗ Difrakce na kruhovém otvoru. Přejděte na terčíku a stínítku do polárních souřadnic a vypočtěte difrakci na centrovaném kruhovém otvoru o poloměru R.

$$\left[I(\rho) = |A_\mathrm{D}\pi R^2|^2\left(\frac{2J_1(kR\rho/r0)}{kR\rho/r_0}\right)^2,\ \ \rho^2 = \xi^2+\eta^2\right]$$

Aplikace.

9.1 Podle Gullstrandova–Le Grandova modelu oka má rohovka tloušťku 0.55 mm a index lomu 1.3771. Určete dobu, za kterou projde rohovkou tam a zpět (po odrazu od zadní stěny) signál a) ultrazvuku ($v{\doteq}1500$ m/s), b) světelný.

[]

9.2 *Dvojlom.* Předpokládejte planparalelní desku vyrobenou z křemene, indexy lomu řádného a mimořádného paprsku v křemeni jsou po řadě $n_\mathrm{o}{=}1.544$ a $n_\mathrm{e}{=}1.553$. Uvažujte kolmo dopadající světlo a vypočtěte fázový rozdíl řádného a mimořádného paprsku při průchodu deskou tloušťky L a

- určete nejmenší tloušťku desky, při které se bude chovat jako čtvrtvlnná (způsobí fázový rozdíl $\pi/2$ mezi řádným a mimořádným paprskem a tedy změní dopadající lineární polarizaci světla na kruhovou) a jako půlvlnná (způsobí fázový rozdíl π a změní orientaci lineárně polarizovaného světla na kolmou)

- zjistěte, jaké tloušťky desky jsou k dispozcici, má-li půlvnná destička mít tloušťku kolem 1 mm.

[]

9.3∗ *Antireflexní vrstva.* Předpokládejte tlustou planparalelní desku o indexu lomu n_1, na které je nanesena tenká vrstva materiálu o indexu lomu n_2. Pro světlo dopadající kolmo ze strany tenké vrstvy určete celkovou intenzitu I_t prošlého světla deskou; uvažujte násobné odrazy pouze uvnitř tenké vrstvy, fázové členy však zanedbejte. Určete n_2, které množství prošlého světla maximalizuje a porovnejte získanou hodnotu s příkladem 5.1 samotné desky.

$$\left[\frac{I_\mathrm{t}}{I_0}=\frac{16n_1^2n_2}{(n_1+1)^3(n_1+n_2^2)}, n_2=\sqrt{n_1},\ \text{pro}\ n_1=1.5\text{:}\ \frac{0.94}{0.92}\right]$$