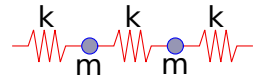


B. VLNY

1. **1D řetízek** identických **atomů** interagujících elasticky vždy pouze s nejbližšími sousedy lze aproximovat sadou stejných malých závaží o hmotnosti m , spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k . Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a , výchylky $x[j]$ jednotlivých závaží uvažujte od jejich rovnovážných poloh. Předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin (tíhové působení zanedbejte).



- Předpokládejte periodické okrajové podmínky (délka opakujícího se motivu řetízku je Na) a specifikujte jejich vliv na předpokládaný tvar řešení $x[j]=\tau^j$.

$$[\tau = \exp(ik_n a), k_n = \frac{2\pi n}{l}]$$

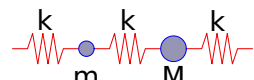
- Pro studovaný periodický řetízek řešte pohybové rovnice využitím ansatzu $x[j]=\tau^j$; nalezněte disperzní relaci pro vlnu v tomto řetízku.

$$[x_n[j] \propto \exp(i[\omega_n t + k_n a j]); \omega_n^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{k_n a}{2}]$$

- Spočítejte grupovou a fázovou rychlost šíření vln v uvažovaném periodickém řetízku.

$$[v_f = a\omega_0 \operatorname{sinc}(ka/2), v_g = a\omega_0 \cos(ka/2)]$$

- 1.1 Nalezněte všechny větve disperzní relace pro 1D řetízek střídajících se atomů o dvou různých hmotnostech m a M ; tuhost všech vazeb uvažujte k , vzdálenost sousedních atomů stejné hmotnosti nechť je a . Pro výchylky $x[j]$, $X[j]$ v subřetízcích atomů stejné hmotnosti předpokládejte řešení ve tvaru $x[j], X[j] \propto \exp(i[\omega t + ka j])$.



$$[\omega^2 = k \left(\frac{1}{\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - \frac{4}{mM} \cos^2(ka/2)} \right), \mu = \frac{mM}{m+M}]$$

- 1.2* *Blochův teorém.* Ukažte, že frekvence kmitů nekonečného homogenního řetízku se shodují s vlastními hodnotami τ translační matice T ,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že působením translační matice na vektor výchylek jednotlivých atomů se posuneme o jednu pozici podél řetízku. Nalezněte matice, které způsobí posun podél řetízku o dvě pozice, a o jednu pozici opačným směrem. Ukažte, že pro vlastní vektory dynamické matice (a tedy i pro výchylky podél řetízku) platí $x[j] \propto \tau^j$.

2. **Vlnová rovnice.** Uvažujte nekonečný řetízek stejných malých závaží o hmotnosti m , spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k . Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a , a předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Pole výchylek jednotlivých závaží z jejich rovnovážných poloh popište spojitou veličinou $u(x)$, čili $u[j] \equiv u(x[j]) = 0$ prochází-li závaží rovnovážnou polohou.

- Sestavte pohybové rovnice pro i -té závaží a ukažte, že za předpokladu $a \rightarrow 0$ tyto pohybové rovnice přechází v rovnici vlnovou.

$$[m\ddot{u}_i = k(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \ddot{u} - v^2 u'' = 0, v^2 = ka^2/m]$$

- 2.1 Ukažte, že $f(\omega t \pm \mathbf{kx})$ může být řešením vlnové rovnice pro libovolné f .

$$[\text{pokud } v \equiv v_f]$$

- 2.2 *Helmholtzova rovnice.* Ukažte, že ve stacionárním případě $u(\mathbf{x}, t) = \sum_i U_i(\mathbf{x}) \exp(i\omega_i t)$ se vlnová rovnice redukuje na Helmholtzovy rovnice $\Delta U_i + k_i^2 U_i = 0$.

$$[\omega_i^2 = v_f |\mathbf{k}|^2]$$

3. Aplikace

3.1 *Tíhové vlny* na hluboké vodě mají disperzní relaci $\omega = \sqrt{gk}$, kde g je tíhové zrychlení. Spočtete fázovou a grupovou rychlost šíření tíhových vln a tyto rychlosti vzájemně porovnejte.

$$[v_f = \sqrt{g/k}, v_g = \sqrt{g/k}/2; v_g < v_f]$$

3.2 *Kapilární vlny* mají disperzní relaci $\omega = \sigma k^3 / \rho$, kde σ je povrchové napětí kapaliny a ρ její hustota. Spočtete fázovou a grupovou rychlost šíření kapilárních vln a tyto rychlosti vzájemně porovnejte.

$$[v_f = \sigma k^2 / \rho, v_g = 3\sigma k^2 / \rho; v_g > v_f]$$