ZMMF 3 – Domácí úkol z algebry tenzorů

(1) Ve vektorovém prostoru V_n jsou v bázi (e_1, e_2, e_3) zadány vektory a_1, a_2, a_3 složkami takto: $a_1 \sim (2, -1, 0)$, $a_2 \sim (-1, 3, -2)$, $a_3 \sim (-2, 0, -3)$. Duální báze (indukovaná báze v prostoru V_n^*) je (e^1, e^2, e^3). Vyplňte následující tabulku hodnot (a_k, a_ℓ)

	(a_1, a_1)	(a_1, a_2)	(a_2, a_1)	(a_2, a_2)	(a_3, a_1)	(a_1, a_3)	(a_2, a_3)	(a_3, a_2)	(a_3, a_3)
$e^1 \otimes e^1$									
$e^1 \otimes e^2$									
$e^2 \otimes e^1$									
$e^2 \otimes e^2$									
$e^3 \otimes e^1$									
$e^1 \otimes e^3$									
$e^2 \otimes e^3$									
$e^3 \otimes e^2$									
$e^3 \otimes e^3$									
$e^1 \wedge e^1$									
$e^1 \wedge e^2$									
$e^2 \wedge e^1$									
$e^2 \wedge e^2$									
$e^3 \wedge e^1$									
$e^1 \wedge e^3$									
$e^2 \wedge e^3$									
$e^3 \wedge e^2$									
$e^3 \wedge e^3$									

(2) Dokažte, že soubor $\left\{ \frac{1}{2}\left(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i\right) \right\}_{1 \le i \le j \le n}$ tvoří bázi v tenzorovém prostoru $S_2^0(V_n)$ (symetrické tenzory) a soubor $\left\{ \frac{1}{2}\left(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i\right) \right\}_{1 \le i < j \le n}$ tvoří bázi v $\Lambda_2^0(V_n)$ (antisymetrické tenzory). Dále dokažte, že soubor $\left\{ e^i \wedge e^j \right\}_{1 \le i < j \le n}$ tvoří rovněž bázi v $\Lambda_2^0(V_n)$.

(3) V zápisech $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega_{i_1 \cdots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ najděte vztah mezi složkami $\omega_{i_1 \cdots i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ a $\tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_k}$ $(i_1, \cdots, i_k$ libovolné$)$.