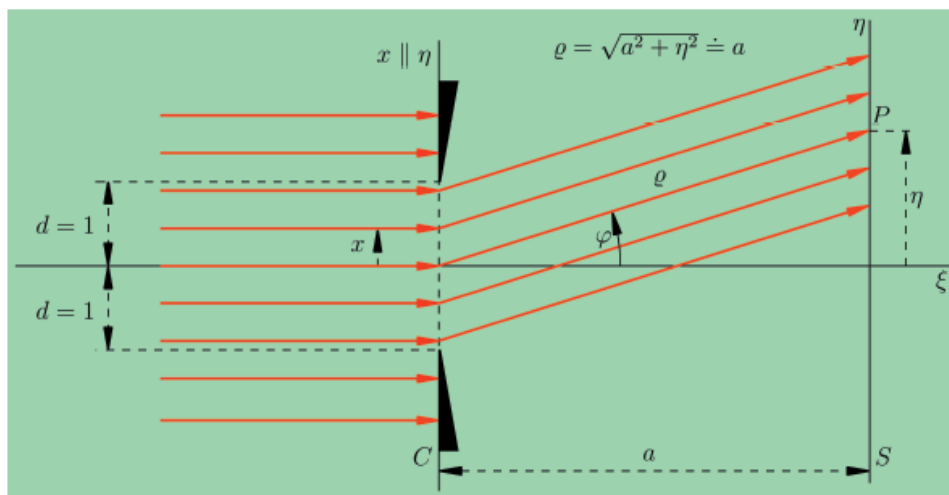


Příklad 13.62: ... a fyzikálně

Právě získaný výsledek má značný význam. Ukazuje na těsný vztah matematického aparátu Fourierovy transformace k fyzice. I když fyzikální aplikace jsou avizovány až pro další odstavec, udělejme si malý vstup do fyziky už nyní. Představme si ve shodě s obrázkem 13.35, že na neprůhledné stínítko C (clona) s úzkou štěrbinou podél intervalu $[-d, d] = [-1, 1]$ dopadá kolmo rovnoběžný svazek světla jedné vlnové délky λ , jíž odpovídá kruhová frekvence $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$, kde T je perioda vlnění a c rychlost světla. Co uvidíme na stínítku S ? Vzhledem k tomu, že tento text není primárně fyzikální, použijeme k výkladu popisovaného experimentu značná zjednodušení. Zavedeme ještě tzv. vlnový vektor \vec{k} , jehož velikost je definována jako $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ a směr je shodný se směrem šíření světelných paprsků. Obrázek 13.35 ukazuje, jak je experiment realizován a obsahuje i další potřebná označení. Dopadající světlo se šíří podél souřadnicové osy ξ , jeho vlnový vektor má v ortonormální bázi s osami ξ , η a ζ (poslední osa není zakreslena) složky $\vec{k}_0 = (k, 0, 0)$. Vyjdeme-li z obecného tvaru zápisu rovinné vlny $E(\tau, \vec{r})$, kde proměnné τ a $\vec{r} = (\xi, \eta, \zeta)$ představují čas a prostorové souřadnice místa, v němž vlnu pozorujeme, dostaneme pro dopadající vlnu vztah $E = E_0 e^{-i(\omega\tau - k\xi)}$. V místech dopadu na clonu C je $\vec{r} = (0, \eta, \zeta)$ a $E = E_0 e^{-i\omega\tau}$. Podle jednoho ze základních principů klasické optiky, tzv. *Huygensova principu*, lze šíření světelné vlny interpretovat zhruba řečeno takto: každý bod vlnoplochy (geometrického místa bodů vyznačujících se shodnou fází vlny) je zdrojem nové kulové vlny a obálka vlnoploch všech takto vzniklých sekundárních vln je vlnoplochou výsledné vlny v dalším okamžiku. Kdyby tedy rovnoběžnému svazku světla v šíření nic nepřekáželo, postupoval by nadále v podobě rovinné vlny. Clona se štěrbinou je však překážkou, která výslednou vlnoplochu změní. Dochází k interferenci a ohybu světla, k tzv. *difrakci*. Zaměříme se jen na



Obrázek 13.35 Difrakce na štěrbině.

situaci, kdy je stínítko S „hodně daleko“ od clony C , takže vlny, které k němu přicházejí, lze ve výsledku přibližně popsat opět jako rovinné. (Této aproximaci se říká *Fraunhoferova difrakce*, zatímco přesnější popis představuje difrakce *Fresnelova*.) Předpokládejme, že výsledné vlnění pozorujeme, resp. zaznamenáváme na stínítku S v místě o souřadnicích $P = (a, \eta, 0)$. Sekundární kulová vlna o elementární amplitudě $E_0 \frac{dx}{2a} = \frac{1}{2} E_0 dx$ šířící se z obecného bodu štěrbině $(0, x, 0)$, $x \in [-1, 1]$, má v bodě $(a, \eta, 0)$ tvar

$$dE = \frac{E_0}{2a} e^{-i[\omega\tau - k\sqrt{a^2 + (\eta-x)^2}]} dx,$$

výsledná funkce E je pak dána integrálem tohoto výrazu v mezích $[-1, 1]$. Předtím, než budeme integrovat, provedeme avizovanou Fraunhoferovu aproximaci. Ve jmenovateli výrazu pro sekundární vlnu nahradíme $\rho \doteq a$ a exponent upravíme takto:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + (\eta-x)^2} &= \sqrt{a^2 + \eta^2} \sqrt{1 - \frac{2\eta x}{a^2 + \eta^2} + \frac{x^2}{a^2 + \eta^2}} \doteq \sqrt{a^2 + \eta^2} - \frac{\eta x}{\sqrt{a^2 + \eta^2}} = \\ &= \sqrt{a^2 + \eta^2} - x \sin \varphi \doteq a - x \sin \varphi. \end{aligned}$$

Pro vlnu v pozorovacím bodě P pak dostaneme

$$E(\tau, P) \doteq \frac{E_0}{2a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \int_{-1}^1 e^{-ixk \sin \varphi} dx.$$

Jistě dokážeme dokončit výpočet přímoou integrací. Ukážeme však jiný postup a uvidíme, jak souvisí difrakce s Fourierovou transformací. Označíme-li $t = k \sin \varphi$ a popíšeme-li „propustnost“ clony C pomocí funkce $F(x) = 1$ pro $x \in [-1, 1]$ a $F(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$, můžeme vlnu v bodě P zapsat pomocí zpětné Fourierovy transformace: Především zapíšeme funkce $E(\tau, t)$ pomocí $F(x)$, tj.

$$E(\tau, t) = E(\tau, P) = \frac{E_0}{2a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx.$$

Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dt$ je 2π -násobkem zpětného Fourierova obrazu funkce $F(x)$. Pro $F(z) = 1$ je, jak víme z příkladu 13.61, vzorem funkce $\frac{1}{\pi} \text{sinc } t$. Dostáváme tak

$$E(\tau, t) = \frac{\pi E_0}{a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \mathcal{F}^{-1} F(t) = \frac{E_0}{a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \frac{\sin t}{t} = \frac{E_0}{a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \frac{\sin(k \sin \varphi)}{k \sin \varphi}.$$

Objevili jsme souvislost mezi funkcí popisující propustnost clony a funkcí popisující rozložení amplitudy vlny na pozorovacím stínítku v aproximaci Fraunhoferovy difrakce. Vztah mezi těmito funkcemi zprostředkovává Fourierova transformace! Na stínítku S samozřejmě neuvidíme rozložení funkce $E(\tau, k \sin \varphi)$, ale rozložení intenzity světla, tj. $I = E^* E$, tzv. *difrakční obrazec*,

$$I(\varphi) = \frac{|E_0|^2}{a^2} \frac{\sin^2(k \sin \varphi)}{k^2 \sin^2 \varphi} = I_0 \frac{\sin^2(k \sin \varphi)}{k^2 \sin^2 \varphi}.$$