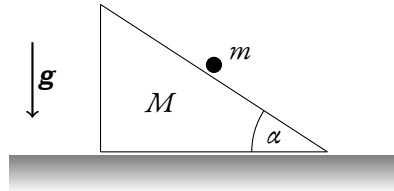
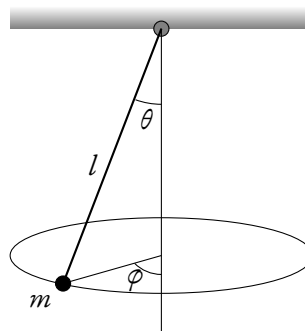


**Harmonický oscilátor** Vyděte z Principu nejmenší akce a nalezněte funkci popisující časovou závislost polohy harmonického oscilátoru. Nepoužívejte Euler-Lagrangeovu rovnici. (Pondělní skupina do 23. října, čtvrteční do 19. října.)

**Skluz po pohyblivé rampě** Tělísko o hmotnosti  $m$  se pohybuje bez tření po nakloněné rovině s neměnným vrcholovým úhlem  $\alpha$  o hmotnosti  $M$ , která se také může bez tření pohybovat po vodorovné podložce. Nalezněte všechny pohybové rovnice a zachovávané veličiny. (Pondělní skupina do 30. října, čtvrteční do 26. října.)



**Sférické kyvadlo** Vypočtěte Euler-Lagrange rovnici(-e) pro sférické kyvadlo, tj. pro hmotný bod  $m$  na niti konstantní délky  $l$ , který se může bez odporu kývat vertikálně, a zároveň opisovat horizontální elipsu. Dále určete, které fyzikální veličiny se zachovávají, vypočtěte je, a přímým výpočtem dokažte, že tomu tak skutečně je. Lze tento problém převést na 1-D integraci? Jak by vypadal efektivní potenciál pro kyvadlo v posluchárně F2 a rozumné cvrknutí? (Pondělní skupina odevzdává do 6. a čtvrteční do 2. listopadu.)



**Druhý a třetí Keplerův zákon** Mějme izolovanou soustavu dvou hmotných bodů se vzájemnou interakcí úměrnou pouze jejich vzdálenosti  $V(r)$ . Vezměte všeobecně známý Lagrangian a:

- Odvoďte druhý Keplerův zákon (zákon ploch) na základě oné přidružené a zjevně se zachovávané veličiny.
- Ukažte, že třetí Keplerův zákon vyjádřený obecně<sup>1</sup>

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{k},$$

lze pro Slunce a Zemi s redukovanou hmotností

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_{\odot}} + \frac{1}{M_{\oplus}},$$

a označením  $k = GM_{\odot}M_{\oplus}$  zapsat ve tvaru  $T^2 = a^3$ , kdy velkou poloosu  $a$  vyjadřujeme v astronomických jednotkách a periodu  $T$  v rocích. Dále spočtěte vzdálenost středu Slunce od středu hmotnosti soustavy Slunce — Země a vyjádřete ji v poloměrech Slunce  $R_{\odot}$ . (Pondělní skupina odevzdává do 13. a čtvrteční do 9. listopadu.)

<sup>1</sup>Do 7.11. a 17h byla pravá část uvedena nekorektně jako  $2\pi\sqrt{\mu/k}$ . Thx BM+PS za odhalení.

### Hamiltonián tajemného systému Mějmež Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2.$$

Spočtete Hamiltonián, vypočtete Hamiltonovy rovnice. Tyto rovnice vyřešte a pro jistotu, užijte oba možné způsoby. Nakreslete fázový portrét. O jaký se jedná systém? (Pondělní skupina odevzdává do 20. a čtvrteční do 16. listopadu.)

**V elektromagnetickém poli** Předpokládejme, že Lagrangian pro nabitou částici v elektromagnetickém poli jest

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\Phi + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad [\text{cgs}]$$

kde  $e$  je elektrický náboj a  $\mathbf{v}$  rychlost částice ve skalárním  $\Phi(x, y, z, t)$  a vektorovém  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  potenciálu. Vztah mezi nimi a magnetickou či elektrickou intenzitou je

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi. \quad [\text{cgs}]$$

Odvoďte pohybovou rovnici pro tuto částici, a dokažte, že na ni pole působí silou

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right). \quad [\text{cgs}]$$

Dále vypočtete Hamiltonián a zobecněnou hybnost. Všechny vztahy jsou uvedeny v systému jednotek cgs, je-li vám bližší SI, bez obav jej užijte.

Nápověda: totální časová derivace obecné funkce  $G(x, y, z, t)$  podél dráhy částice je

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla G.$$

Možná též shledáte užitečnou identitu  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  aplikovatelnou na vektory i jejich gradienty. (Pondělní skupina odevzdává do 27. a čtvrteční do 23. listopadu.)

**Tenzor deformace a napětí** Posunutí bodů rovinného tělesa při deformaci je dáno vektorem  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T = (-Ax + By, Bz, Cy)^T$ . Určete:

- tenzor deformace včetně členů vyšších řádů,
- načrtněte, nebo vykreslete na počítači, vektorové pole  $\mathbf{u}(x, y, z)$  v jednotlivých rovinách,
- popište deformaci slovně,
- rozdělte tenzor deformace na objemovou a smykovou část,
- vypočtete relativní změnu objemu,
- dochází-li ke smyku, určete smykový úhel,
- sestavte tenzor napětí,
- vyčíslíte veličiny z (e)–(g), pro  $A = 1/1000$ ,  $B = 2/1000$ ,  $C = 3/1000$ , a hodnoty elastických koeficientů:  $K = 10^7$  Pa,  $\mu = 10^6$  Pa.

(Pondělní skupina odevzdává do Barborky a čtvrteční den po Mikuláši.)

**Poissonův poměr** Naleznete vhodný materiál a předmět (s vhodnou strukturou, mající malý Youngův modul, příhodný tvar a velikost), vystavte ho působení síly, a zdokumentujte, fotograficky či měřením, změny jeho tvaru. Odhadněte Poissonův poměr tohoto materiálu. (Pondělní skupina odevzdává do 11. a čtvrteční do 14. prosince)

**Kosmická trubice** Kosmická stanice je tvořena dlouhou trubicou o vnitřním poloměru  $R_1$  a vnějším  $R_2$ , jež byly změřeny před startem. Určete o kolik se změní vnější poloměr trubky po vynesení na oběžnou dráhu Země. Předpokládejte, že stěny trubice jsou tvořeny homogenním materiálem popsáným konstantami  $E$  a  $\sigma$ . (Pondělní skupina odevzdává do 18. a čtvrteční do 21. prosince)