# ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY F5082
## úvodní cvičení

1. Výraz $\phi = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$ převeďte do tvaru $\phi = Ae^{i\varphi}$, t.j. vyjádřete veličiny A,$\varphi$ pomocí veličin $A_1$, $\varphi_1$, $A_2$, $\varphi_2$.

2. Uvažujme dvouštěrbinový experiment. Amplituda vlny procházející štěrbinou A a dopadající do bodu P (poloha detektoru) je v relativních jednotkách $\psi_A=2$, amplituda vlny přicházející od štěrbiny B je $\psi_B=6$. Je-li otevřena pouze štěrbina A, dopadá do bodu P 100 elektronů za sekundu. Kolik elektronů bude registrováno za sekundu v bodě P:
a) je-li otevřena jen štěrbina B,
b) jsou-li otevřeny obě štěrbiny a dochází-li ke konstruktivní interferenci,
c) jsou-li otevřeny obě štěrbiny a dochází-li k destruktivní interferenci?

3. Najděte fázovou a grupovou rychlost de Broglieových vln pro relativistickou částici s energií E a impulsem p.

4. Proveďte normování vlnového klubka de Broglieovy vlny s koeficienty $c(p)=C$ na vybraném intervalu $\Delta p$ kolem bodu $p_0$. Pro zbylé hodnoty hybnosti jsou koeficienty nulové.

5. Spočítejte tvar vlnového klubka pro volnou částici, která je v čase $t=0$ lokalizována v intervalu $-a$ do $a$, kde $\psi(x,0)=A$, pokud je $x\in[-a,a]$, jinak je nulová. Odhadněte vliv Heisenbergových relací neurčitosti na lokalizaci vlnového klubka v obou reprezentacích, souřadnicové a hybnostní.

6. Spočítejte Heisenbergovy relace neurčitosti pro vlnové klubko jehož koeficienty jsou gaussovského tvaru. Uvažujte pro případ $t=0$.

# ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY F5082
## úvodní cvičení

1. Výraz $\phi = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$ převeďte do tvaru $\phi = Ae^{i\varphi}$, t.j. vyjádřete veličiny A,$\varphi$ pomocí veličin $A_1$, $\varphi_1$, $A_2$, $\varphi_2$.

2. Uvažujme dvouštěrbinový experiment. Amplituda vlny procházející štěrbinou A a dopadající do bodu P (poloha detektoru) je v relativních jednotkách $\psi_A=2$, amplituda vlny přicházející od štěrbiny B je $\psi_B=6$. Je-li otevřena pouze štěrbina A, dopadá do bodu P 100 elektronů za sekundu. Kolik elektronů bude registrováno za sekundu v bodě P:
a) je-li otevřena jen štěrbina B,
b) jsou-li otevřeny obě štěrbiny a dochází-li ke konstruktivní interferenci,
c) jsou-li otevřeny obě štěrbiny a dochází-li k destruktivní interferenci?

3. Najděte fázovou a grupovou rychlost de Broglieových vln pro relativistickou částici s energií E a impulsem p.

4. Proveďte normování vlnového klubka de Broglieovy vlny s koeficienty $c(p)=C$ na vybraném intervalu $\Delta p$ kolem bodu $p_0$. Pro zbylé hodnoty hybnosti jsou koeficienty nulové.

5. Spočítejte tvar vlnového klubka pro volnou částici, která je v čase $t=0$ lokalizována v intervalu $-a$ do $a$, kde $\psi(x,0)=A$, pokud je $x\in[-a,a]$, jinak je nulová. Odhadněte vliv Heisenbergových relací neurčitosti na lokalizaci vlnového klubka v obou reprezentacích, souřadnicové a hybnostní.

6. Spočítejte Heisenbergovy relace neurčitosti pro vlnové klubko jehož koeficienty jsou gaussovského tvaru. Uvažujte pro případ $t=0$.

# ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY F5082
## 1. cvičení

1. Najděte výsledek aplikace operátoru $\left[x^2 \frac{d}{dx}\right]^2$ na funkci $\cos(x)$.
   Totéž pro operátor $\left[\frac{d}{dx} x^2\right]^2$.

2. Upravte operátorový výraz $\left[x^2 \frac{d}{dx}\right]^2$.
   Totéž pro operátor $\left[\frac{d}{dx} x^2\right]^2$.

3. Upravte operátorové výrazy: a) $\left[\frac{d}{dx} + 1\right]^2$, b) $\left[\frac{d}{dx} + x\right]^2$.

4. Ukažte, že operátory „násobení nezávisle proměnnou" a „derivace podle jiné nezávisle proměnné" komutují.

5. Upravte operátory: a) $\left[\frac{d}{dx} + x\right]^3$, b) $\left[\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\right]^3$.

6. Vypočtěte komutátory: a) $\left[x_j, \frac{d}{dx_k}\right]$, b) $\left[\frac{d}{dx}, x^2\right]$, c) $\left[\frac{d}{dx}, f(x)\right]$.

7. Dokažte, že a) součet, b) součin lineárních operátorů $\hat{F}$, $\hat{G}$, ... je rovněž lineárním operátorem.

8. Najděte operátor hermiteovsky sdružený s operátorem
   a) násobení komplexní konstantou,
   b) násobení (reálnou) nezávisle proměnnou,
   c) derivace podle (reálné) nezávisle proměnné.

9. Ukažte, že hermiteovská sdruženost je vlastnost vzájemná, tj. pokud je operátor $\hat{G}$ hermiteovsky sdružený s operátorem $\hat{F}$, pak také operátor $\hat{F}$ je hermiteovsky sdružený s operátorem $\hat{G}$.

10. Rozhodněte, zda operátory $\hat{F} = \frac{d}{dx}$ a $\hat{G} = i\frac{d}{dx}$ jsou lineární a hermiteovské v prostoru všech kvadraticky integrabilních funkcí jedné proměnné.

11. Operátory $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ převeďte do sférických souřadnic.

# ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY F5082

## 2. cvičení

1. Komutátory $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]$, $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]$, $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\hat{D}]$, $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}+\hat{D}]$ vyjádřete pomocí komutátorů jednotlivých operátorů $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D}$..

2. Dokažte, že $\left[\sum_j c_j\hat{A}_j,\ \sum_k d_k\hat{B}_k\right] = \sum_j\sum_k c_j d_k \left[\hat{A}_j,\hat{B}_k\right]$.

3. Přesvědčte se, že lineární kombinace vlastních funkcí lineárního operátoru $\hat{F}$ příslušných
   a) jeho téže (degenerované) vlastní hodnotě $F$ je, opět vlastní funkcí tohoto operátoru příslušnou této vlastní hodnotě,
   b) jeho různým vlastním hodnotám, není jeho vlastní funkcí.

4. Najděte vlastní hodnoty a vlastní funkce (splňující standardní podmínky) operátoru $x + \frac{d}{dx}$.

5. Dokažte, že operátor $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ je hermiteovský v prostoru všech kvadraticky integrabilních funkcí tří reálných proměnných $(x, y, z)$.

6. V prostoru kvadraticky integrabilních funkcí tří prostorových proměnných $(x, y, z)$ ověřte hermicitu operátorů a) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, b) $\Delta$
   a najděte jejich vlastní hodnoty a vlastní funkce splňující standardní podmínky.

48 7. Najděte operátor hermiteovsky sdružený se
   a) součtem,
   b) součinem,
   c) lineární kombinací
   operátorů $\hat{F},\hat{G},\dots$.

60 8. Dokažte, že vlastní hodnoty hermiteovského operátoru jsou reálné.

61 9. Dokažte, že vlastní funkce hermiteovského operátoru příslušné jeho různým vlastním hodnotám jsou navzájem ortogonální.

10. Dokažte následující vlastnosti Diracovy deltafunkce:
    a) $\delta(\xi-\eta) = \delta(\eta-\xi)$,
    b) $\delta[c\,(\xi-\eta)] = \frac{1}{c}\,\delta(\xi-\eta)$, ( $c$ je kladná konstanta)
    c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\xi-\eta)\,\delta(\xi-\chi)\,d\xi = \delta(\eta-\chi)$.

$\langle f|\hat{A} g\rangle$

# ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY F5082

## 3. cvičení

1. Určete vlastní funkce (splňující standardní podmínky) a vlastní hodnoty operátoru $\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$ [operátor $x$ – ové komponenty hybnosti $\hat{p}_x$ v souřadnicové reprezentaci]. Přesvědčte se, že tyto funkce nejsou kvadraticky integrabilní a znormujte je.

2. Totéž pro (vektorový) operátor hybnosti (v souřadnicové reprezentaci): $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$.

3. Najděte vlastní hodnoty a normované vlastní funkce operátoru $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$, kde φ je polární úhel sférických souřadnic. ŠKÁLA 193

4. Ukažte, že $\varphi_p(x) = \varphi_x^*(p)$, kde $\varphi_p(x)$ je vlastní funkce operátoru ($x$-ové komponenty) hybnosti $\hat{p}$ v souřadnicové reprezentaci a $\varphi_x(p)$ je vlastní funkce operátoru souřadnice $\hat{x}$ v impulzové reprezentaci ($p$). [1]

5. Existuje nějaká souvislost mezi vlastními funkcemi operátoru $\hat{F}$ v $G$-reprezentaci a vlastními funkcemi operátoru $\hat{G}$ v $F$-reprezentaci? Pokud ano, jaká? $\varphi_p(x) = \varphi_x^*(p)$ ✓

6. Napište transformační vztah mezi vlnovými funkcemi $\psi(F)$ a $c(G)$ vyjadřujícími tentýž stav v $F$-reprezentaci a $G$-reprezentaci.

7. Najděte tvar vlastních funkcí operátoru $\hat{F}$ v $F$-reprezentaci. Rozlište případ operátorů
   a) s diskrétním spektrem vlastních hodnot,
   b) se spojitým spektrem vlastních hodnot.

8. Vyjádřete operátor momentu hybnosti $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ v souřadnicové reprezentaci (kartézské souřadnice). ŠKÁLA 229

9. Najděte komutátory $[\hat{p}_x, f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]$, $[\hat{\vec{p}}, f(\hat{\vec{r}})]$. SKÁLA 179

10. Najděte komutátor operátorukinetické energie $\hat{T} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}$ a operátoru potenciální energie $\hat{V} = V(\hat{\vec{r}})$.

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

---

[1]) O impulzové reprezentaci se hovoří, jsou-li za bázi v prostoru vlnových funkcí zvoleny vlastní funkce operátoru hybnosti. Termín „hybnostní reprezentace" se v češtině neujal.

$$[\hat{T}, \hat{V}]\psi = [\hat{T}\hat{V} - \hat{V}\hat{T}]\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\nabla(V\psi) - V\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla\cdot\nabla\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla(\nabla V\psi + V\nabla\psi)$$
$$+ V\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[(\nabla^2 V + \nabla V\nabla\psi) + \nabla V\cdot\nabla\psi + V\nabla^2\psi\right] + \frac{\hbar^2}{2m}V\nabla^2\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2 V + 2\nabla V\nabla\right]\psi$$

# ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY F5082

## 4. cvičení

1. Najděte tvar operátoru $x$-ové souřadnice $(\hat{x})$ v impulzové reprezentaci.
2. Totéž pro (vektorový) operátor polohy $\hat{\vec{r}}$.
3. V impulzové reprezentaci najděte normované vlastní funkce (splňující standardní podmínky) a vlastní hodnoty operátoru $x$-ové komponenty hybnosti $(\hat{p}_x)$.
4. Totéž pro (vektorový) operátor hybnosti $\hat{\vec{p}}$.
5. Dokažte, že v libovolném stavu $\psi$ je střední hodnota energie $< \hat{H} >$ libovolného mikroobjektu větší nebo rovna energii jeho základního stavu.
6. Najděte komutátor $[\hat{L}_j, \hat{r}_k]$ $j$-té komponenty momentu hybnosti a $k$-té komponenty polohy.
7. Najděte komutátor $[\hat{L}_j, \hat{p}_k]$ $j$-té komponenty momentu hybnosti a $k$-té komponenty hybnosti.
8. Najděte komutátory $[\hat{L}_j, \hat{r}_k^2]$, $[\hat{L}_j, \hat{p}_k^2]$.
9. Zjistěte, zda jsou kartézské složky momentu hybnosti současně přesně měřitelné.
10. Zjistěte, zda je v principu možné změřit současně přesně $j$-tou komponentu momentu hybnosti a kinetickou energii mikroobjektu.

$[\hat{L}_j, \hat{T}] = 0$ ?

$L_j = -i\hbar\,\varepsilon_{jkl}\, x_k \frac{\partial}{\partial x_l}$

$L_1 = -i\hbar x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + i\hbar x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} = -i\hbar\left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

apod

# ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY F5082

5. cvičení

1. Jaké výsledky a s jakými pravděpodobnostmi lze dostat při měření fyzikální veličiny $\hat{F}$ ve stavu $\psi(G)$ ? Po obecném řešení diskutujte speciální případy a) $\psi = \varphi_{F'}$,
   b) $\hat{F} \equiv \hat{G}$.

2. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že mikroobjekt nacházející se ve stavu popsaném vlnovou funkcí $\psi(x, y, z)$ má $z$-ovou souřadnici z intervalu $< z_1, z_2 >$ a $y$-ovou komponentu hybnosti z intervalu $< p_{y_1}, p_{y_2} >$.

3. Lze současně určit polohu a (celkovou) energii mikroobjektu?

4. Ukažte, že v případě dvou komutujících operátorů $\hat{F}$, $\hat{G}$, z nichž jeden $(\hat{F})$ má nedegenerované vlastní hodnoty a druhý $(\hat{G})$ degenerované, je každá vlastní funkce operátoru $\hat{F}$ také vlastní funkcí operátoru $\hat{G}$, avšak ne každá vlastní funkce operátoru $\hat{G}$ je rovněž vlastní funkcí operátoru $\hat{F}$.

5. V libovolném stavu $\psi$ vypočtěte $< \widehat{\Delta G} >$.

6. Vypočtěte $< (\widehat{\Delta G})^2 >$ ve vlastním stavu veličiny $\hat{G}$.

7. Přesvědčte se, že obecná Schrödingerova rovnice má v libovolné reprezentaci stejný tvar
$$i\hbar \frac{\partial \psi(\_,t)}{\partial t} = \hat{H}\_\psi(\_,t).$$

8. Proveďte separaci proměnných v obecné Schrödingerově rovnici v případě, že potenciální energie mikroobjektu nezávisí na čase.

9. Dokažte, že ve stacionárním stavu rozdělení pravděpodobnosti naměření různých hodnot libovolné fyzikální veličiny nezávisí na čase.

10. Dokažte, že střední hodnota libovolné fyzikální veličiny ve stacionárním stavu nezávisí na čase.

bylo na přednášce

ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY F5082

6. cvičení

1. Najděte stacionární stavy mikroobjektu nacházejícího se v konečně hluboké jednorozměrné pravoúhlé potenciálové jámě se stěnami v bodech $x = -a$ a $x = a$, a potenciálem $V_0$ okolo.

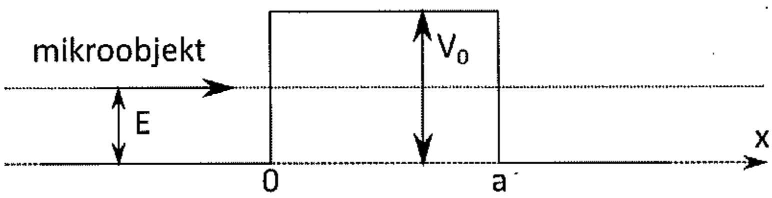
2. Jaký charakter má energiové spektrum mikroobjektu nacházejícího se v potenciálovém poli

   a) $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad |x| < a, \\ V_0 & \text{pro} \quad |x| > a, \end{cases}$ kde $V_0$ je kladné (záporná) konstanta,

   b) $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, kde $k$ je kladná konstanta,

   c) $V(r) = \frac{k}{r}$ , kde $k$ je kladná (záporná) konstanta.

3. Najděte koeficient průchodu mikroobjektu o energii $E$ pravoúhlou potenciálovou bariérou výšky $V_0 > E$ a šířky $a$.




4. Prověřte hermicitu operátoru momentu hybnosti.

152

154 5. Najděte střední hodnoty operátorů $\hat{L}_x$ a $\hat{L}_y$ ve vlastním stavu operátoru $\hat{L}_z$.

156 6. Ukažte, že existence kvantověmechanického s-stavu (tj. stavu, v němž $L^2 = 0 = L_x = L_y = L_z$) neodporuje principu neurčitosti.

7. Ukažte, že energiové spektrum mikroobjektu, nacházejícího se v poli tvořeném periodicky se střídajícími potenciálovými jamami a bariérami, se skládá z pásů.

ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY F5082

7. cvičení

1. Prověřte hermicitu operátoru momentu hybnosti.

2. Najděte střední hodnoty operátorů $\hat{L}_x$ a $\hat{L}_y$ ve vlastním stavu operátoru $\hat{L}_z$.

3. Pomocí relace neurčitosti ukažte, že moment hybnosti nemůže být orientován přesně do preferovaného směru.

4. Ukažte, že existence kvantověmechanického s-stavu (tj. stavu, v němž $L^2 = 0 = L_x = L_y = L_z$) neodporuje principu neurčitosti.

5. Vysvětlete, proč se kvantování velikosti momentu hybnosti a jeho komponent neprojevuje v makrosvětě.

6. Proveďte separaci radiální a úhlových proměnných ve stacionární Schrödigerově rovnici se sféricky symetrickým potenciálem.

+ periodický potenciál