Vázané třívlnové procesy

Třívlnové procesy v nelineárním prostředí s podmínkou $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \\
E &= \frac{1}{2}\sum_{m=\pm1,\pm2,\pm3} E_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_m t - k_m z)} \qquad\qquad (\omega_{-m} = -\omega_m,\ \ k_{-m} = -k_m) \\
P_{NL} = 2dE^2 &= \frac{d}{2}\sum_{m,n=\pm1,\pm2,\pm3} E_m E_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,[(\omega_m+\omega_n)t\,-\,(k_m+k_n)z]} \\
\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} &= -\frac{d}{2}\,\mu_0 \sum_{m,n=\pm1,\pm2,\pm3} (\omega_m+\omega_n)^2\, E_m E_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,[(\omega_m+\omega_n)t\,-\,(k_m+k_n)z]}
\end{aligned}$$

Nelineární část polarizace má 36 členů. Dosazením do vlnové rovnice se získá diferenciální rovnice, kterou lze pro $\omega_m \neq \omega_n \neq \omega_o \neq \omega_m$ rozdělit na soustavu tří diferenciálních rovnic (a tří komplexně sdružených rovnic):

$$\begin{aligned}
(\Delta + k_1^2)\,\frac{E_1(z)}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t\,-\,k_1 z)} &= -d\mu_0\omega_1^2\, E_2^* E_3\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,[\omega_1 t\,-\,(k_3-k_2)z]} \\
(\Delta + k_2^2)\,\frac{E_2(z)}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t\,-\,k_2 z)} &= -d\mu_0\omega_2^2\, E_1^* E_3\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,[\omega_2 t\,-\,(k_3-k_1)z]} \\
(\Delta + k_3^2)\,\frac{E_3(z)}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t\,-\,k_3 z)} &= -d\mu_0\omega_3^2\, E_1 E_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,[\omega_3 t\,-\,(k_1+k_2)z]}
\end{aligned}$$

kterou lze upravit na

$$\begin{aligned}
E_1'(z) &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\, d\,\omega_1 E_2^* E_3\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z} \\
E_2'(z) &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\, d\,\omega_2 E_1^* E_3\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z} \qquad (1) \\
E_3'(z) &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\, d\,\omega_3 E_1 E_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}
\end{aligned}$$

kde $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$.

V degenerovaném případě $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$ (generování druhé harmonické) získáme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned}
E_1'(z) &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\, d\,\omega_1 E_1^* E_3\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z} \qquad (2) \\
E_3'(z) &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\, d\,\omega_1 E_1^2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}
\end{aligned}$$

$(\Delta k = k_3 - 2k_1)$. Tato soustava rovnic nevyplývá z předchozí soustavy dosazením $\omega_1 = \omega_2$ a $E_1 = E_2$, druhá rovnice se liší faktorem $1/2$.

Ze soustavy (1) jednoduše vyplývají tzv. Manleyovy-Roweovy relace

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\omega_1}\frac{\mathrm{d}\,(E_1E_1^*)}{\mathrm{d}z} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\omega_2}\frac{\mathrm{d}\,(E_2E_2^*)}{\mathrm{d}z} = -\frac{\sqrt{\varepsilon_3}}{\omega_3}\frac{\mathrm{d}\,(E_3E_3^*)}{\mathrm{d}z}$$

Pro intenzitu záření platí $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,|E|^2$. Manleyovy-Roweovy relace tedy mají názorný význam

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\omega_2}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{\omega_3}\frac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}z}$$

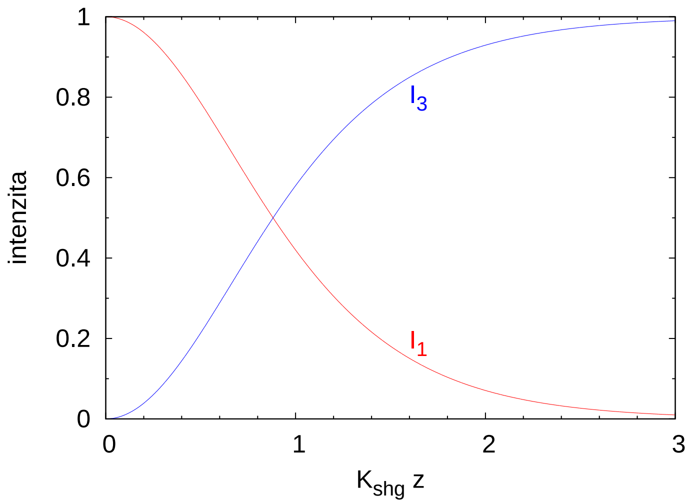
– mluví o změnách toků fotonů a vyplývá z nich zákon zachování energie při trojvlnovém procesu.

Řešení soustav (1) a (2) ve vybraných případech za předpokladu $\Delta k = 0$

1. Generování druhé harmonické ($\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$, $\omega_3 = 2\omega_1$):

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_1(0)\,\mathrm{sech}\left[\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,d\,E_1(0)\,z\right] \\ E_3(z) &= -\mathrm{i}\,E_1(0)\,\mathrm{tgh}\left[\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,d\,E_1(0)\,z\right] \end{aligned}$$

   kde $\mathrm{sech}\,x \equiv 1/\cosh x = 2/(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $\mathrm{tgh}\,x \equiv (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.



Intenzita záření první a druhé harmonické frekvence za předpokladu dokonalé fázové synchronizace. $K_{shg} = \omega\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1}\,d\,E_1(0)$.

2. Vzestupná frekvenční konverze ($E_3(0) = 0$, předpokládáme $E_2 \gg E_1$, E_3 a $E_2 \approx$ konst.):

$$\begin{aligned} E_1' &= -\mathrm{i}K_aE_3 & \qquad K_a &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,\omega_1E_2^*d \\ E_3' &= -\mathrm{i}K_cE_1 & \qquad K_c &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\,\omega_3E_2d \end{aligned}$$

   Tato soustava rovnic vede za podmínky $E_3(0) = 0$ k řešení

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_1(0)\,\cos\sqrt{K_aK_c}\,z \\ E_3(z) &= -\mathrm{i}E_1(0)\sqrt{\frac{K_c}{K_a}}\,\sin\sqrt{K_1K_2}\,z \end{aligned}$$

3. Parametrické zesílení: Signál (ω_1) zesilujeme energií z čerpací vlny (ω_3). Zároveň vzniká tzv. jalová vlna, *idler* (ω_2). $E_2(0) = 0$, $E_3 \gg E_1$, E_2. Předpokládáme $E_3 \approx$ konst.

$$E_1^{*\prime} = \mathrm{i}K_1 E_2 \qquad K_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,\omega_1 E_3 d$$

$$E_2' = -\mathrm{i}K_2 E_1^* \qquad K_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\,\omega_2 E_3 d$$

Použitím podmínky $E_2(0) = 0$ dostaneme

$$E_2 \propto \left(\mathrm{e}^{\sqrt{K_1K_2}z} - \mathrm{e}^{-\sqrt{K_1K_2}z}\right)$$

a po spočítání $E_1 = -\mathrm{i}E_2^{*\prime}/K_2$ a určení integrační konstanty dostaneme

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1(0)\,\cosh\sqrt{K_1K_2}z \\ E_2 &= -\mathrm{i}E_1^*(0)\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\,\sinh\sqrt{K_1K_2}z \end{aligned}$$

4. Parametrické oscilace: Uvažujme oscilace v rezonátoru s nelineárním prostředím, kterým prochází silná čerpací vlna (ω_3). Do soustavy rovnic (1) dodáme ztráty rezonátoru a opět předpokládáme $E_3 \approx$ konst.

$$E_1' = -\alpha_1 - \mathrm{i}K_1 E_2^* \qquad K_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,\omega_1 E_3 d$$

$$E_2' = -\alpha_2 - \mathrm{i}K_2 E_1^* \qquad K_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\,\omega_2 E_3 d$$

Pro prahovou intenzitu čerpacího záření (za podmínek $E_1' = 0$, $E_2' = 0$) dostáváme hodnotu

$$I_{3p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{n_1 n_2 n_3\,\alpha_1\alpha_2}{\omega_1\omega_2\,d^2}$$

Pro $I_3 > I_{3p}$ amplitury E_1 a E_2 porostou a zařízení bude fungovat jako laser na frekvenci ω_1 nebo ω_2.