

Úvod do matematiky pro biology

M1030 Matematika pro biology

20. 9. 2023

Historické poznámky

Vývoj matematiky

Matematika a biologie

Příklady

Historické poznámky

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*

Vývoj matematiky

Poznámka ke slovu „matematika“:

<i>μαθησις</i>	poučení, naučení
<i>μαθητης</i>	učedník
<i>μαθημα</i>	nauka, to co je k naučení něco mezi <i>επιστημη</i> (známost, lat. scientia) <i>γνωσις</i> (poznání, lat. cognitio)
<i>μαθηματικος</i>	náležející k nauce (učedník i pojednání)
<i>μαθηματικα</i>	všechny věci, které jsou této naučné povahy (plurál středního rodu)

Vlivem pýthagorejských učedníků (*μαθηματικοι*) se význam slova „matematika“ zúžil na zabývání se čísly a geometrickými objekty.

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie (axiomy – definice – postuláty)*

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie (axiomy – definice – postuláty)*

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie (axiomy – definice – postuláty)*

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

René Descartes (1596–1650)

- Rozprava o metodě; geometrické úlohy lze řešit metodami algebry

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

René Descartes (1596–1650)

- Rozprava o metodě; geometrické úlohy lze řešit metodami algebry

Isaac Newton (1643–1727), **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716)

- Matematický popis pohybu a změny (infinitesimální počet)

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie (axiomy – definice – postuláty)*

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

René Descartes (1596–1650)

- Rozprava o metodě; geometrické úlohy lze řešit metodami algebry

Isaac Newton (1643–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

- Matematický popis pohybu a změny (infinitesimální počet)
- Krize: infinitesimál je logicky sporný objekt

Matematika a biologie

Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)

V Liber abaci úloha o množení králíků



Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace



Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Daniel Bernoulli (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování



Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Daniel Bernoulli (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

Johann Gregor Mendel (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů



Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Daniel Bernoulli (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

Johann Gregor Mendel (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

Vito Volterra (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

Matematické modely základních vztahů populační dynamiky a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)



Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Daniel Bernoulli (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

Johann Gregor Mendel (1822–1884)

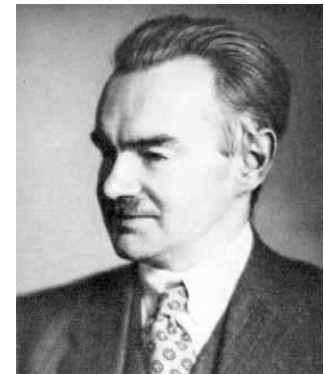
Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

Vito Volterra (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

Matematické modely základních vztahů populační dynamiky
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

Anderson G. McKendrick (1876–1943), **William O. Kermack** (1898–1970)

Matematické modely šíření epidemií



Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Daniel Bernoulli (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

Johann Gregor Mendel (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

Vito Volterra (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

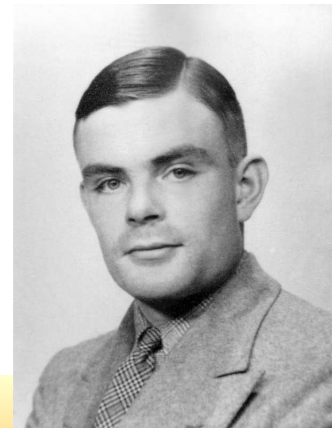
Matematické modely základních vztahů populační dynamiky
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

Anderson G. McKendrick (1876–1943), **William O. Kermack** (1898–1970)

Matematické modely šíření epidemií

Alan Turing (1912–1954)

Matematický model morfogeneze (parciální diferenciální rovnice)



Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Daniel Bernoulli (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

Johann Gregor Mendel (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

Vito Volterra (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

Matematické modely základních vztahů populační dynamiky
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

Anderson G. McKendrick (1876–1943), **William O. Kermack** (1898–1970)

Matematické modely šíření epidemií

Alan Turing (1912–1954)

Matematický model morfogeneze (parciální diferenciální rovnice)

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Popis růstu organismů (formální gramatika)



Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Daniel Bernoulli (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

Johann Gregor Mendel (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

Vito Volterra (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

Matematické modely základních vztahů populační dynamiky
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

Anderson G. McKendrick (1876–1943), **William O. Kermack** (1898–1970)

Matematické modely šíření epidemií

Alan Turing (1912–1954)

Matematický model morfogeneze (parciální diferenciální rovnice)

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Popis růstu organismů (formální gramatika)

John Maynard Smith (1920–2004)

Matematický model evoluce (teorie her)



Historické poznámky

Příklady

Množení králíků

Eulerův model růstu populace

Systemy s diskretním časem a paralelním
přepisováním

Příklady

Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.

○

1



Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



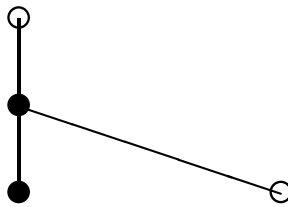
1
1



Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



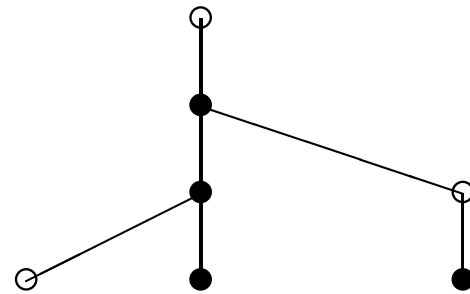
1
1
2



Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



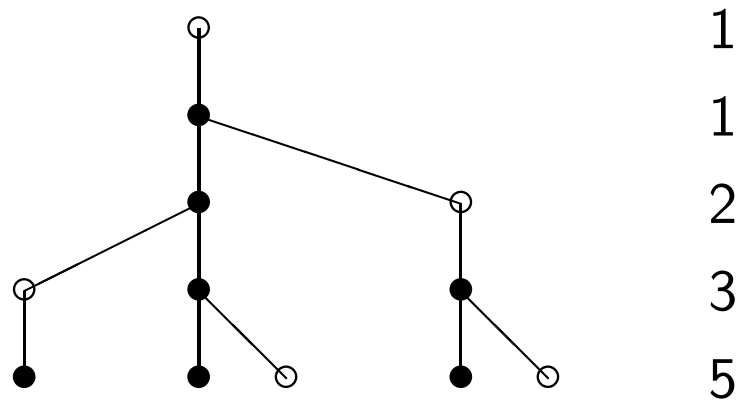
1
1
2
3



Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

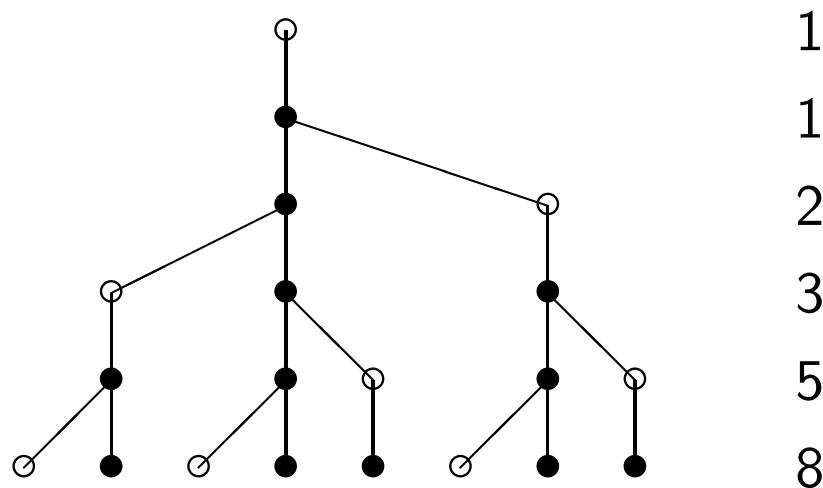
Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



Množení králíků

$x(t)$... počet párů králíků v měsíci t

Množení králíků

$x(t)$... počet párů králíků v měsíci t

$$x(t) =$$

Množení králíků

$x(t)$... počet párů králíků v měsíci t

$$x(t) = x(t - 1)$$

Přežívají všechny páry z předchozího měsíce

Množení králíků

$x(t)$... počet párů králíků v měsíci t

$$x(t) = x(t - 1) + x(t - 2)$$

Přežívají všechny páry z předchozího měsíce

Každý pár starý alespoň měsíc vyprodukuje pár nový

Množení králíků

$x(t)$... počet párů králíků v měsíci t

$$x(t) = x(t - 1) + x(t - 2)$$

Přežívají všechny páry z předchozího měsíce

Každý pár starý alespoň měsíc vyprodukuje pár nový

t	$x(t)$	t	$x(t)$
1	1	7	13
2	1	8	21
3	2	9	34
4	3	10	55
5	5	11	89
6	8	12	144

Eulerův model růstu populace

$x(t)$... velikost populace v čase t

Eulerův model růstu populace

$x(t)$... velikost populace v čase t

$$x(t + 1) = x(t) + \text{množství nových jedinců} - \text{množství uhynulých jedinců}$$

Eulerův model růstu populace

$x(t)$... velikost populace v čase t

b ... porodnost (*birth rate*)

d ... úmrtnost (*death rate*)

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= x(t) + \text{množství nových jedinců} - \text{množství uhynulých jedinců} \\ &= x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t)\end{aligned}$$

Předpoklady:

Množství narozených, vylíhnutých, vyklíčených ... je úměrné množství žijících.
uhynulých

Eulerův model růstu populace

$x(t)$... velikost populace v čase t

b ... porodnost (*birth rate*)

d ... úmrtnost (*death rate*)

r ... koeficient růstu (*intrinsic growth rate*)

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + \text{množství nových jedinců} - \text{množství uhynulých jedinců} \\ &= x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t)\end{aligned}$$

Předpoklady:

Množství narozených, vylíhnutých, vyklíčených ... je úměrné množství žijících.
uhynulých

Označení: $r = 1 + b - d$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Eulerův model růstu populace

$x(t)$... velikost populace v čase t

r ... koeficient růstu (intrinsic growth rate)

$$x(t + 1) = rx(t)$$

Eulerův model růstu populace

$x(t)$... velikost populace v čase t

r ... koeficient růstu (intrinsic growth rate)

$$x(t + 1) = rx(t)$$

Rekurentní vztah pro geometrickou posloupnost, tedy

$$x(t) = x(0)r^t$$

Eulerův model růstu populace

$x(t)$... velikost populace v čase t

r ... koeficient růstu (intrinsic growth rate)

$$x(t + 1) = rx(t)$$

Rekurentní vztah pro geometrickou posloupnost, tedy

$$x(t) = x(0)r^t$$

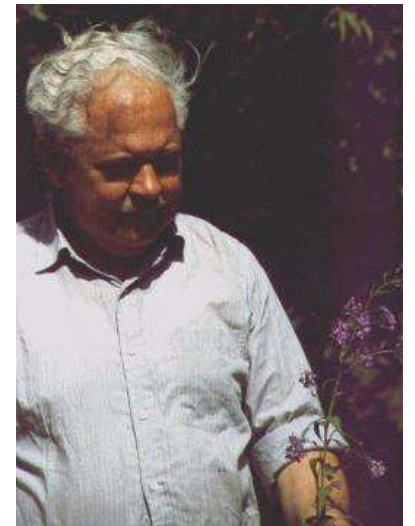
$r > 1 \Rightarrow$ populace neomezeně roste

$r = 1 \Rightarrow$ populace má stálou velikost

$r < 1 \Rightarrow$ populace vymírá

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)



Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Abeceda: množina nějakých rozlišitelných symbolů A

Stav: konečná posloupnost prvků z A , slovo vytvořené z písmen abecedy

Přepisovací pravidla: přiřazení nějakého slova každému písmenu abecedy

Počáteční stav: s_0

Stav s_{i+1} vznikne ze stavu s_i tak, že každý člen x v s_i se nahradí slovem podle přiřazovacího pravidla



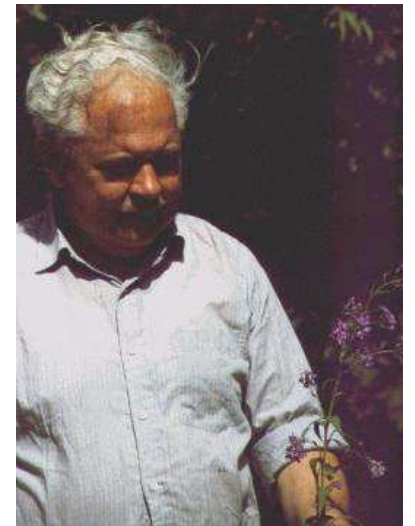
Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1



Systemy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \square$$

$$s_1 = 23$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \square$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{23}$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{23}$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{224}$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{2 \ 3}$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{2 \ 2 \ 4}$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254 \quad \boxed{2 \ 2 \ 5 \ 4}$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{2 \ 3}$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{2 \ 2 \ 4}$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254 \quad \boxed{2 \ 2 \ 5 \ 4}$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654 \quad \boxed{2 \ 2 \ 6 \ 5 \ 4}$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{2 \ 3}$$

$$s_5 = 227654 \quad \boxed{2 \ 2 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4}$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{2 \ 2 \ 4}$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254 \quad \boxed{2 \ 2 \ 5 \ 4}$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654 \quad \boxed{2 \ 2 \ 6 \ 5 \ 4}$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{2 \mid 3}$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 4}$$

$$s_3 = 2254 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 5 \mid 4}$$

$$s_4 = 22654 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 6 \mid 5 \mid 4}$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_5 = 227654 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 7 \mid 6 \mid 5 \mid 4}$$

$$s_6 = 228(1)7654 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 8 \mid 1 \mid 7 \mid 6 \mid 5 \mid 4}$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$


$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$


Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním


Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

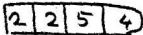
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$ 

$s_1 = 23$ 

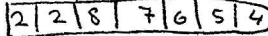
$s_2 = 224$ 

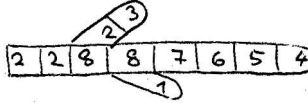
$s_3 = 2254$ 

$s_4 = 22654$ 

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_5 = 227654$ 

$s_6 = 228(1)7654$ 

$s_7 = 228(23)8(1)7654$ 

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$


$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$


Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním


Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$ 

$s_1 = 23$ 

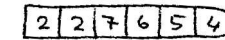
$s_2 = 224$ 

$s_3 = 2254$ 

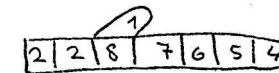
$s_4 = 22654$ 

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

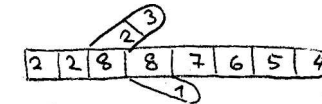
$s_5 = 227654$



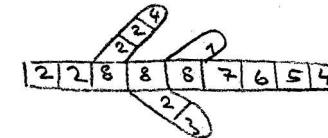
$s_6 = 228(1)7654$



$s_7 = 228(23)8(1)7654$



$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$





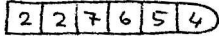
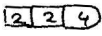
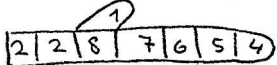
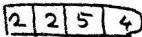
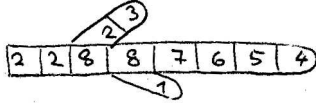
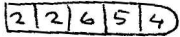
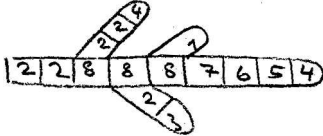
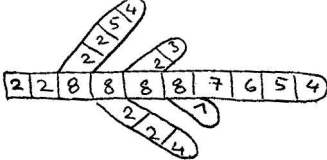
$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1


$s_0 = 1$			
$s_1 = 23$		$s_5 = 227654$	
$s_2 = 224$		$s_6 = 228(1)7654$	
$s_3 = 2254$		$s_7 = 228(23)8(1)7654$	
$s_4 = 22654$		$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$	
$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$			
$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$			

Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

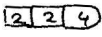
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
 $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$ 

$s_1 = 23$ 

$s_2 = 224$ 

$s_3 = 2254$ 

$s_4 = 22654$ 

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

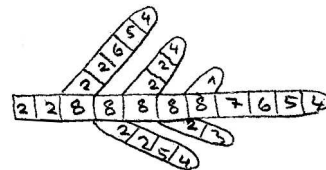
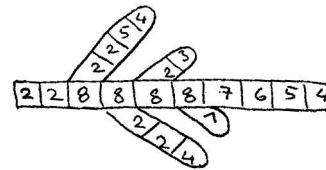
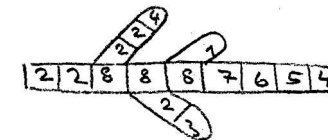
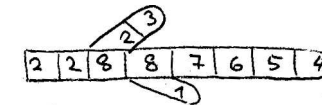
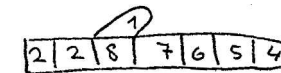
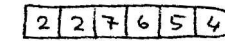
$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$



Abeceda: $M, S, +, -, [,]$

Počáteční stav: M

Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$

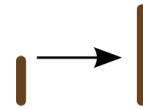
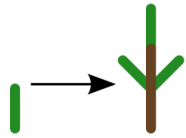
$S \mapsto SS$

Abeceda: $M, S, +, -, [,]$

Počáteční stav: M

Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$

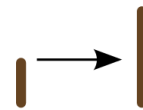
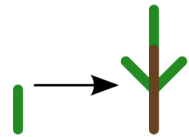


Abeceda: $M, S, +, -, [,]$

Počáteční stav: M

Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$



$i = 0$

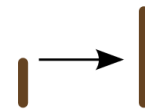
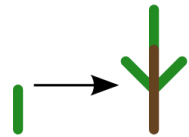
,

Abeceda: $M, S, +, -, [,]$

Počáteční stav: M

Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$



$i = 1$

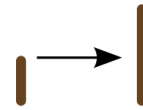
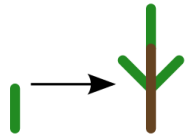


Abeceda: $M, S, +, -, [,]$

Počáteční stav: M

Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$



$i = 2$

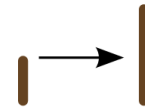
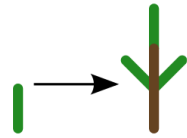


Abeceda: $M, S, +, -, [,]$

Počáteční stav: M

Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$



$i = 3$

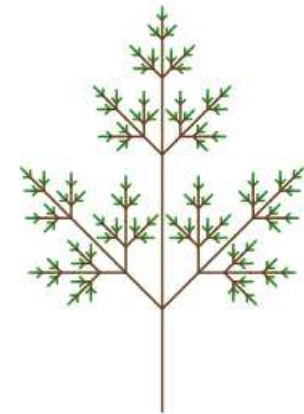
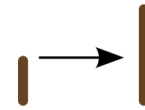
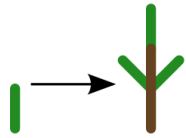


Abeceda: $M, S, +, -, [,]$

Počáteční stav: M

Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$

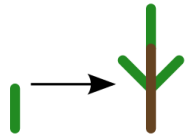


$i = 4$

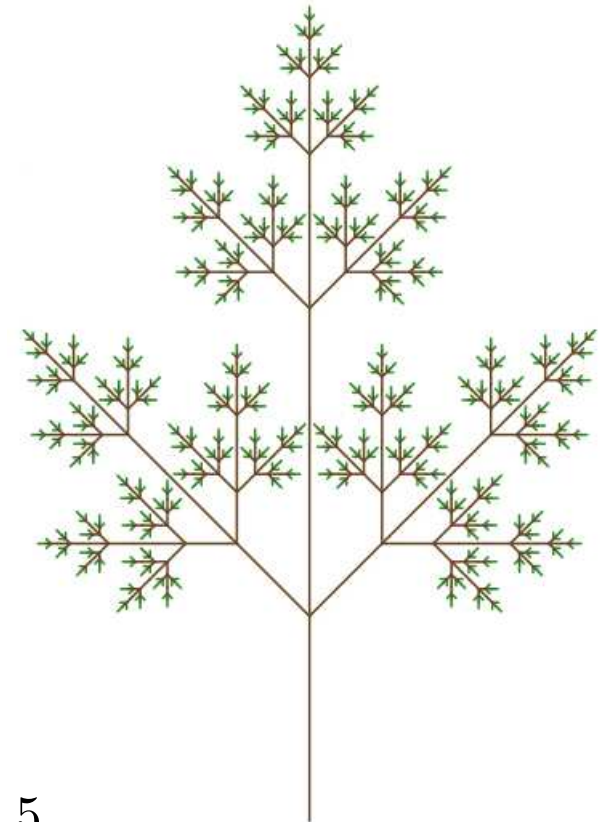
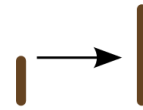
Abeceda: $M, S, +, -, [,]$

Počáteční stav: M

Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$



$S \mapsto SS$



$i = 5$