Spojitost a limita funkce

M1030 Matematika pro biology

29. 11. 2023

Spojité funkce

Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

- její graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou,

Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

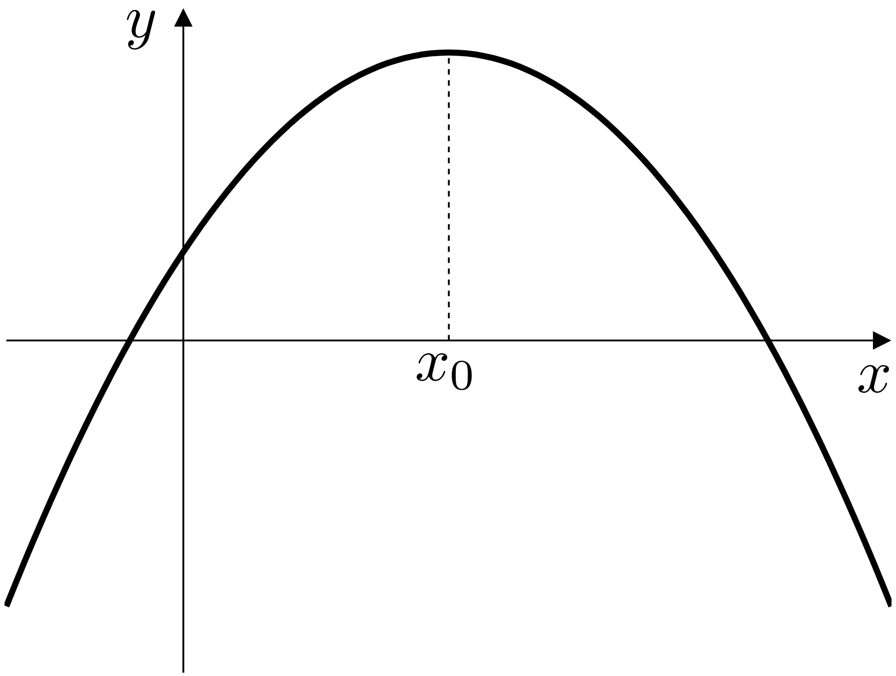
- její graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou,
  tj. její graf je souvislá křivka;

Spojitost

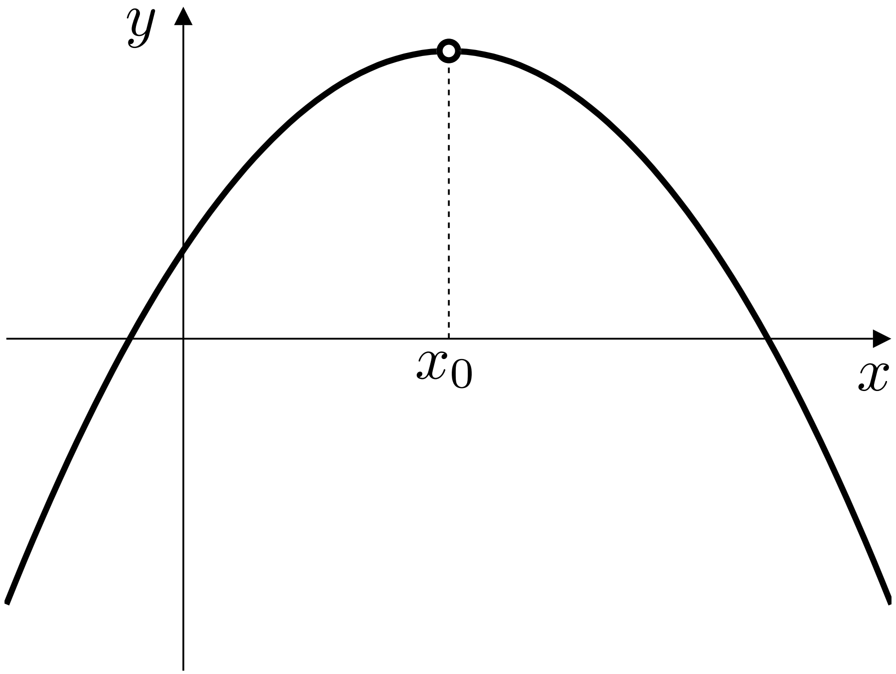
Funkce je spojitá, pokud

- její graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou, tj. její graf je souvislá křivka;
- malá změna nezávisle proměnné vyvolá malou změnu závisle proměnné.

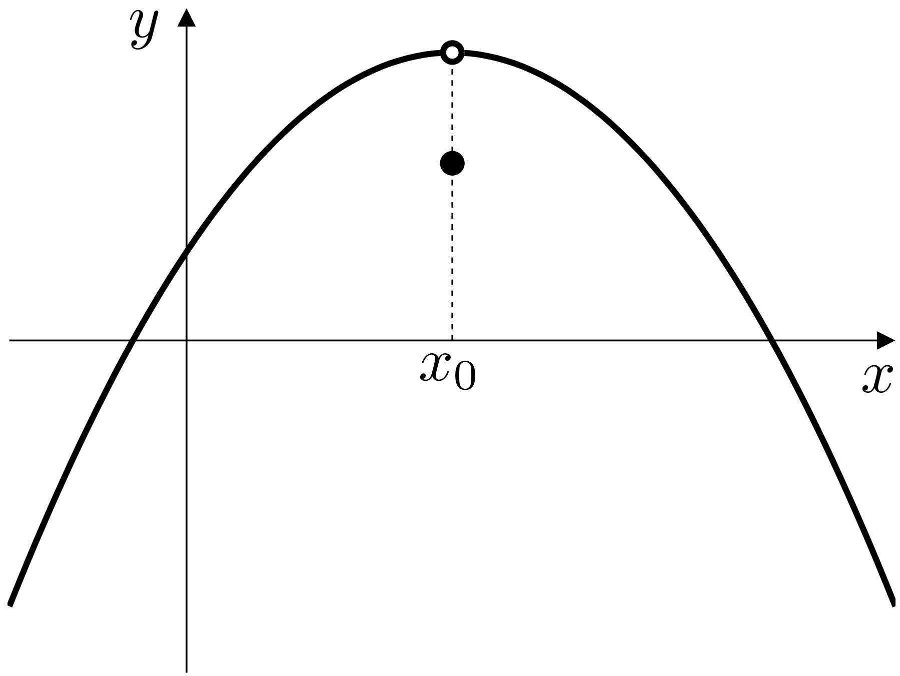
Spojitost v bodě



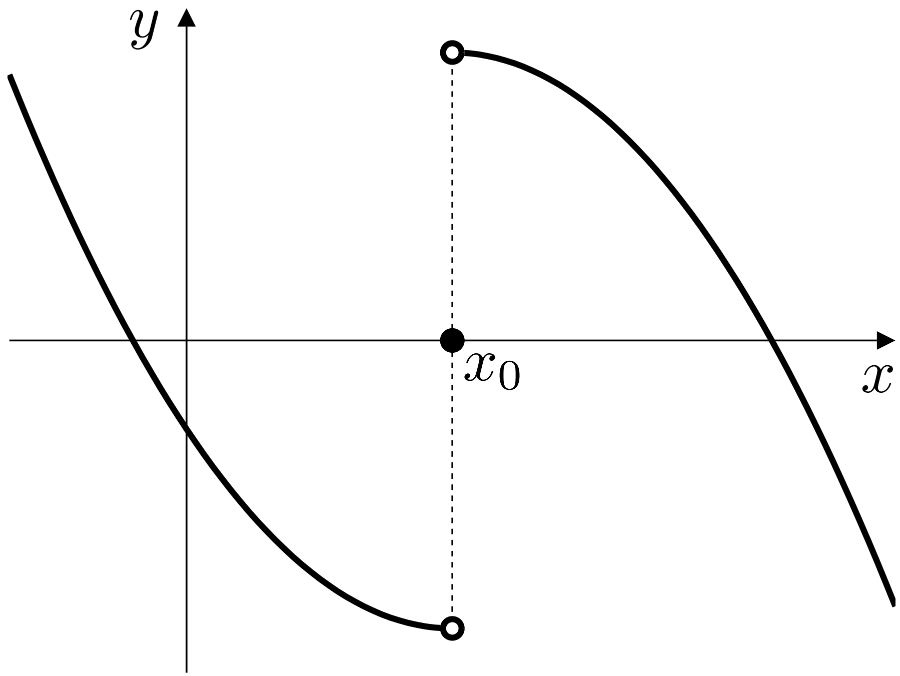
Spojitost v bodě

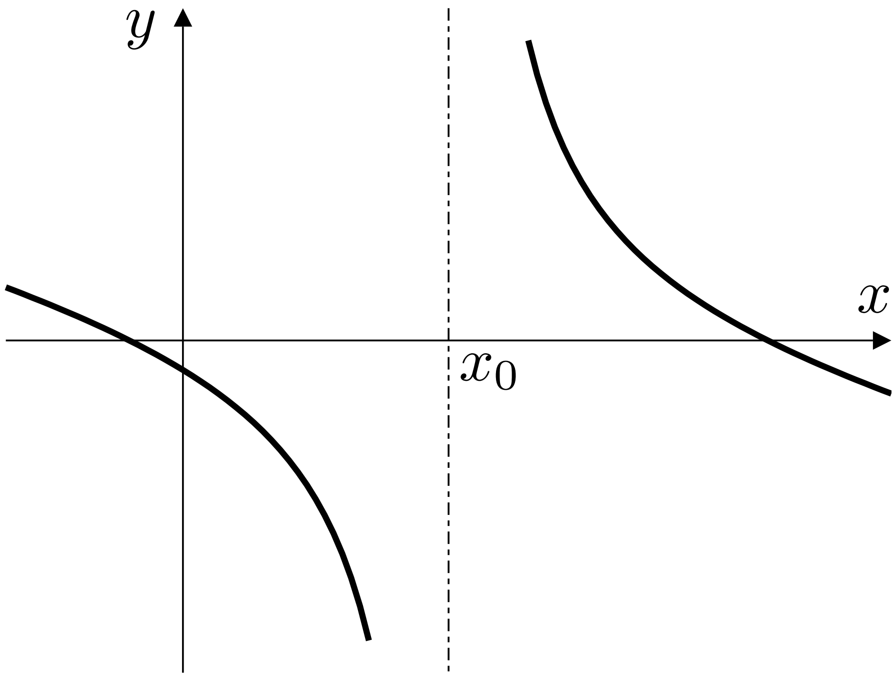


Spojitost v bodě



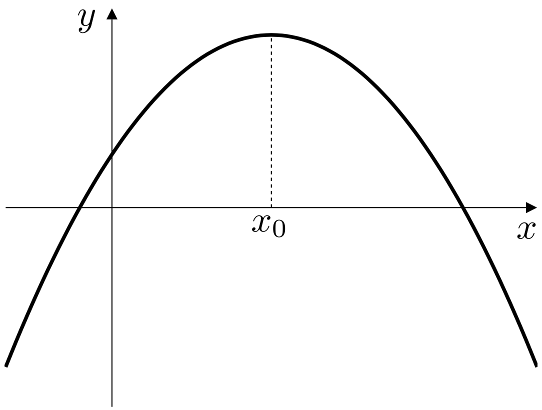
Spojitost v bodě



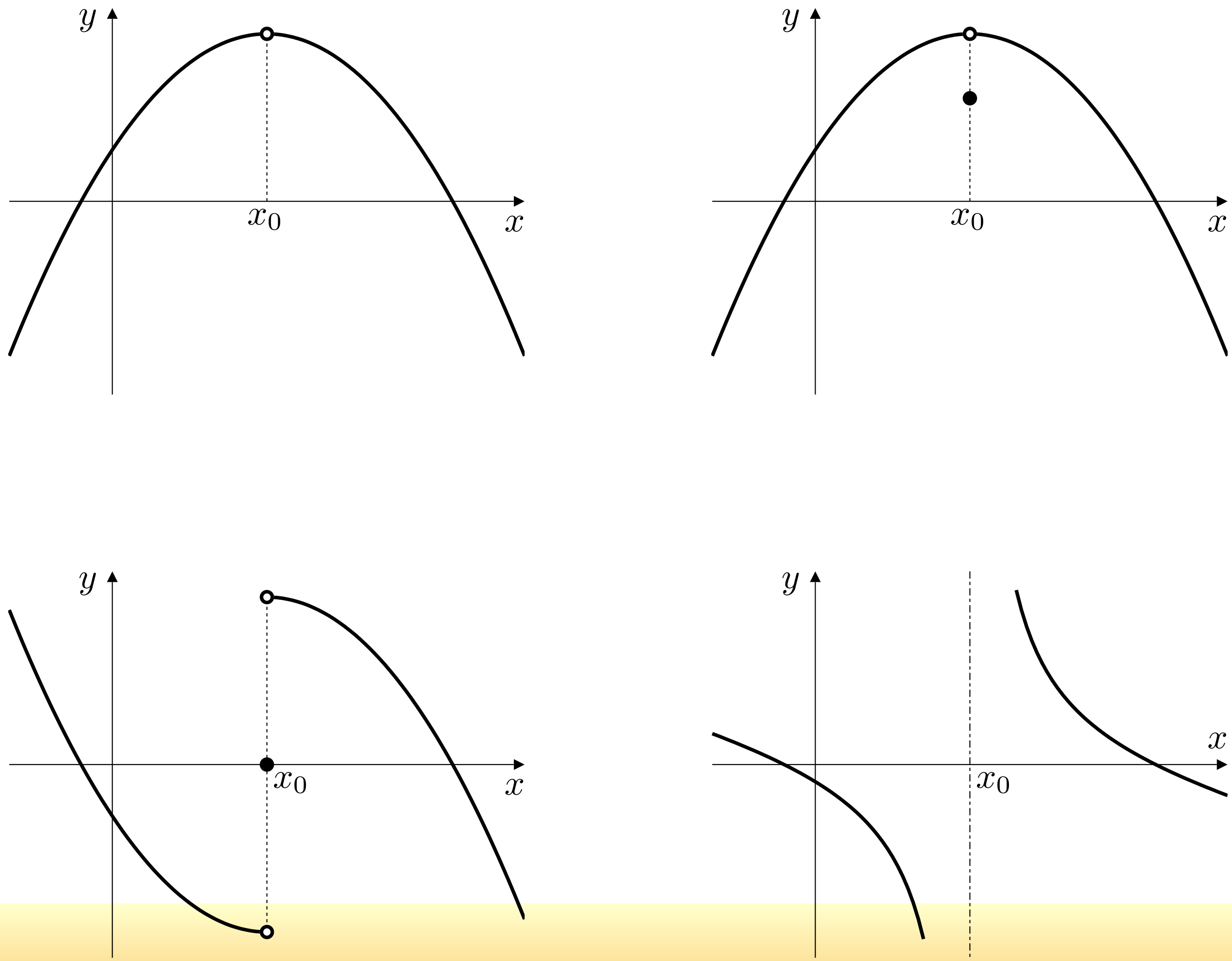


y
x
x_0

Funkce spojitá v bodě x_0

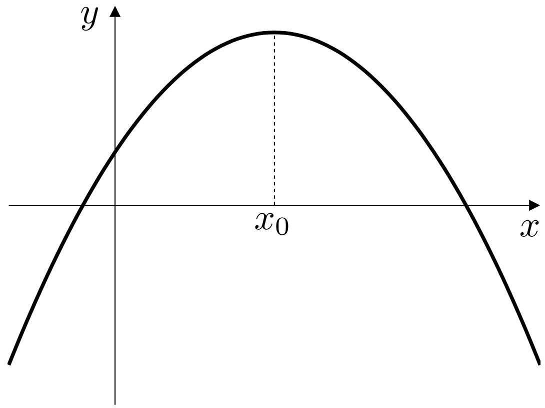


Funkce nespojité v bodě x_0

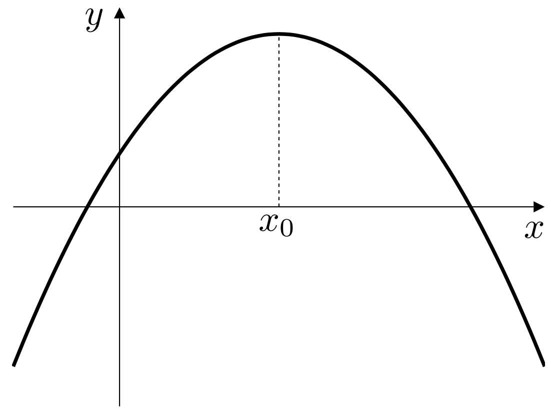


Spojitost v bodě

Funkce f je spojitá v bodě x_0:



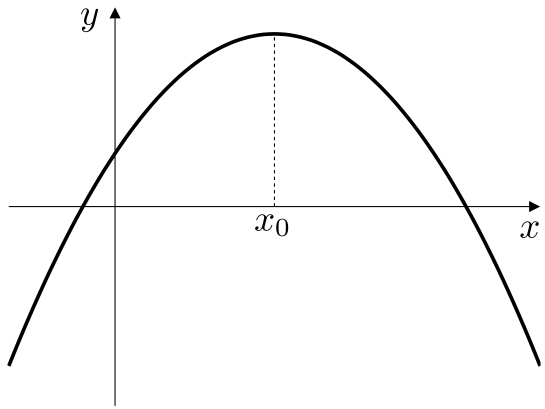
Spojitost v bodě



Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.

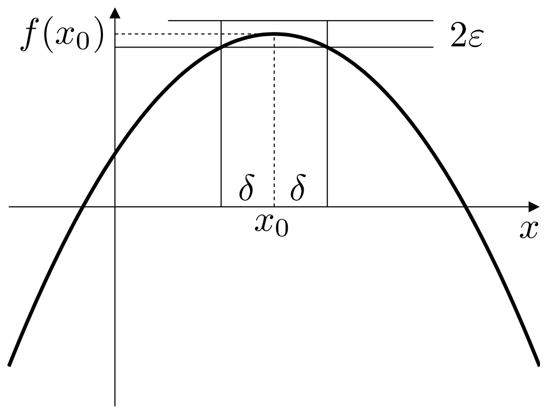
Spojitost v bodě



Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.

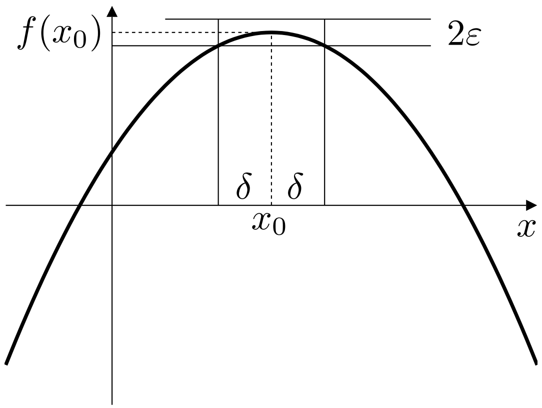
Spojitost v bodě



Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.

Spojitost v bodě

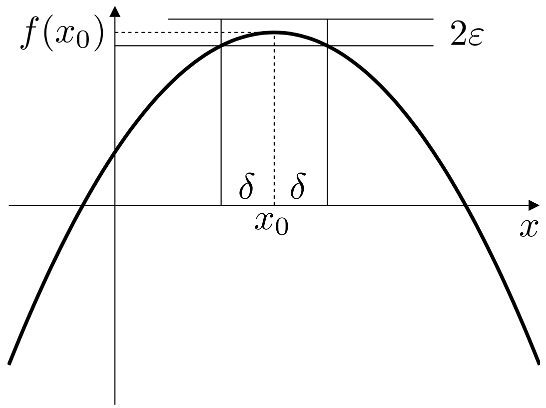


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.

$$x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

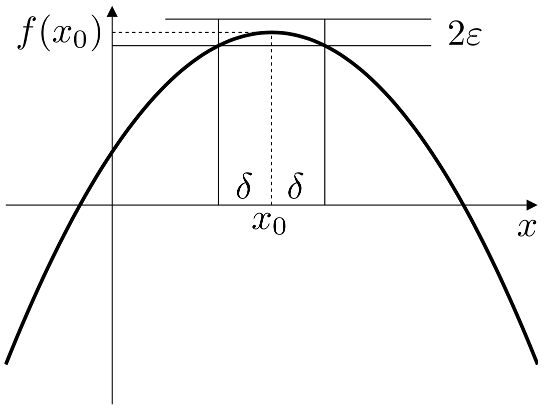


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.
- Ke každému kladnému číslu ε

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

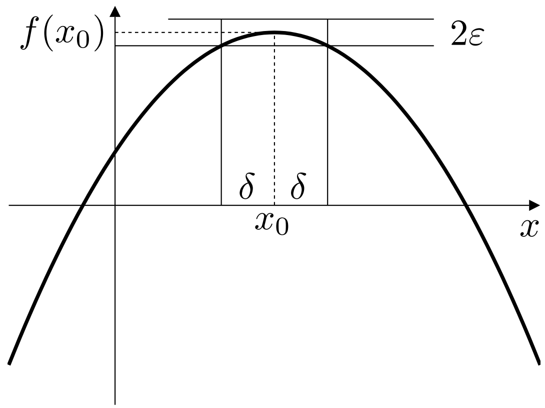


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.
- Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

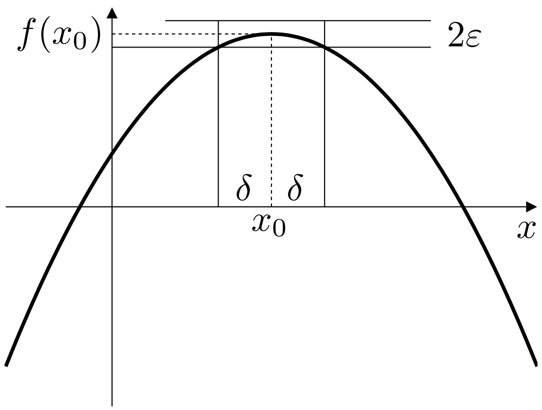


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.
- Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ, že pro jakékoliv $x \in D(f)$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

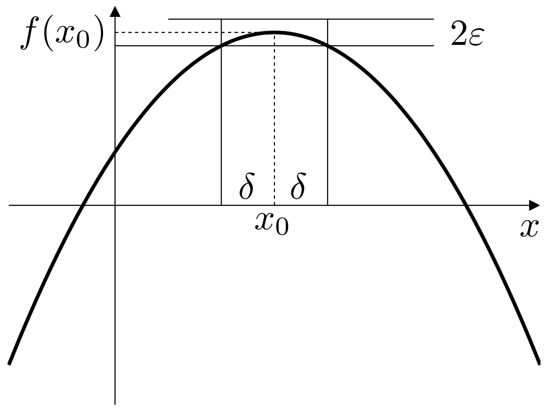


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.
- Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ, že pro jakékoliv $x \in D(f)$ z δ-blízkosti x k x_0 nutně vyplyne ε-blízkost $f(x)$ k $f(x_0)$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

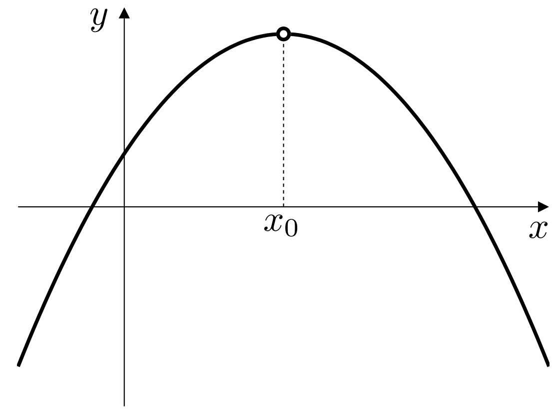


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f *je nespojitá v bodě* x_0:

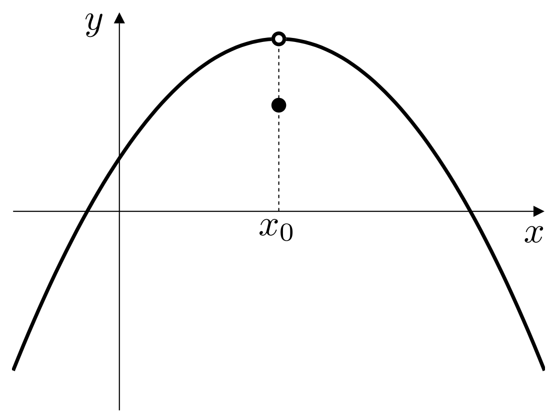
Spojitost v bodě



Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.

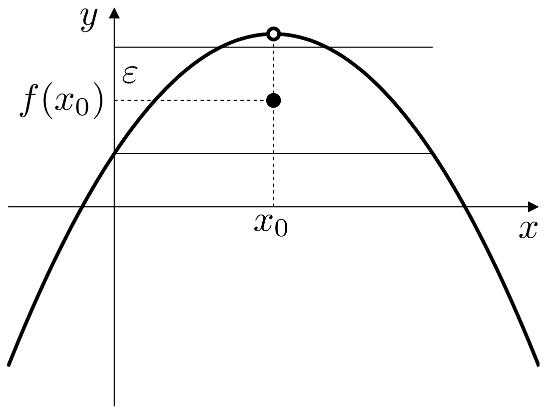
Spojitost v bodě



Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko" k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko".

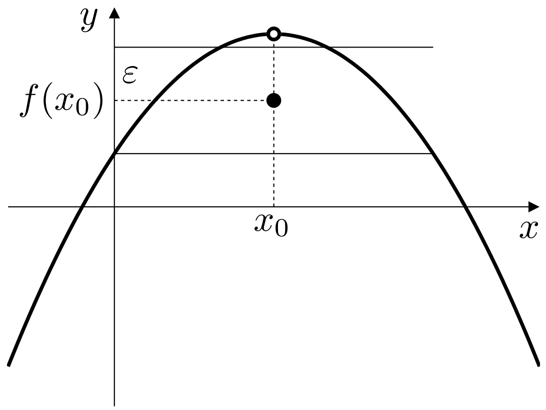
Spojitost v bodě



Funkce f *je nespojitá v bodě* x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko“ k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.

Spojitost v bodě

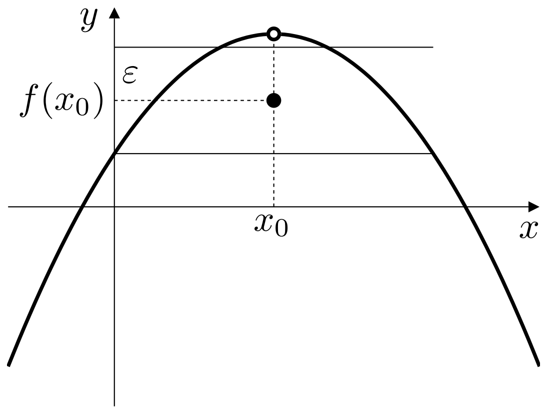


Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko" k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko".
  - Při nějakém „měřítku dalekosti" jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých" k x_0 „daleko" od funkční hodnoty $f(x_0)$.

$$|x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojitost v bodě



Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

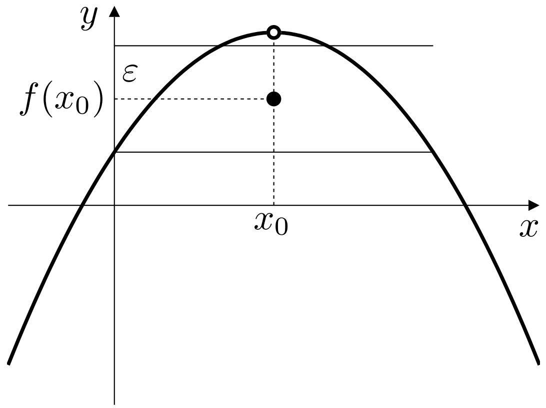
∗ Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.

∗ Pokud $x_0 \in D(f)$, pak

- Přestože x „je blízko" k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko".
- Při nějakém „měřítku dalekosti" jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých" k x_0 „daleko" od funkční hodnoty $f(x_0)$.
- Existuje takové „měřítko dalekosti" ε

$$(\exists \varepsilon > 0) \qquad\qquad |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojitost v bodě

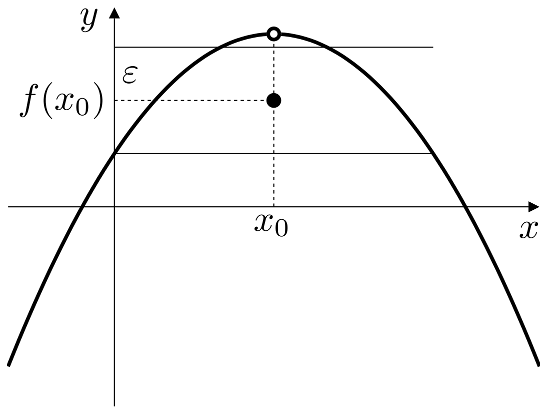


Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko" k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko".
  - Při nějakém „měřítku dalekosti" jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých" k x_0 „daleko" od funkční hodnoty $f(x_0)$.
  - Existuje takové „měřítko dalekosti" ε, že pro libovolné „měřítko blízkosti" δ

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0) \qquad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

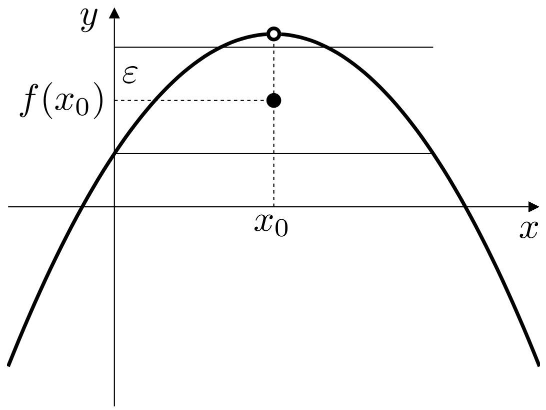
Spojitost v bodě



Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

- ∗ Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
- ∗ Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko" k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko".
  - Při nějakém „měřítku dalekosti" jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých" k x_0 „daleko" od funkční hodnoty $f(x_0)$.
  - Existuje takové „měřítko dalekosti" ε, že pro libovolné „měřítko blízkosti" δ lze najít hodnoty x nezávisle proměnné

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$



Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

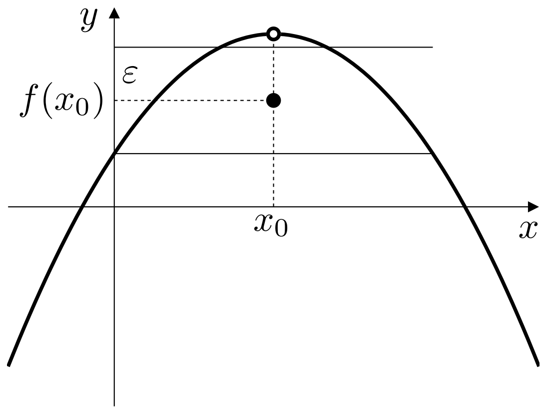
∗ Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.

∗ Pokud $x_0 \in D(f)$, pak

- Přestože x „je blízko“ k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
- Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.
- Existuje takové „měřítko dalekosti“ ε, že pro libovolné „měřítko blízkosti“ δ lze najít hodnoty x nezávisle proměnné „δ-blízké k x_0“, jejichž příslušné funkční hodnoty jsou „ε-vzdálené“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojitost v bodě



Funkce f *je nespojitá v bodě* $x_0 \in D(f)$:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) \ |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$.

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.
Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) \ |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$. Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) \ |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$. Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.
Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta\ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.
Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta\ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta\ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je konstantní.

Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak také funkce

$$f + g,\ f - g,\ fg$$

jsou spojité v bodě x_0. Pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě x_0.

Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak také funkce

$$f + g,\ f - g,\ fg$$

jsou spojité v bodě x_0. Pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě x_0.

Nechť funkce g je spojitá v bodě x_0 a $g(x_0) \in D(f)$. Je-li funkce f spojitá v bodě $g(x_0)$, pak je složená funkce $f \circ g$ spojitá v bodě x_0.

Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak také funkce

$$f+g,\ f-g,\ fg$$

jsou spojité v bodě x_0. Pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě x_0.

Nechť funkce g je spojitá v bodě x_0 a $g(x_0) \in D(f)$. Je-li funkce f spojitá v bodě $g(x_0)$, pak je složená funkce $f \circ g$ spojitá v bodě x_0.

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0. Pokud existuje inverzní funkce f^{-1}, pak je tato funkce spojitá v bodě $f(x_0)$.

Spojitost na intervalu

Funkce f je *spojitá na intervalu* $J \subseteq D(f)$, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

$$(\forall x_0 \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in J)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost na intervalu

Funkce f je *spojitá na intervalu* $J \subseteq D(f)$, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

$$(\forall x_0 \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in J)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Každá elementární funkce je spojitá na každém intervalu, který je částí jejího definičního oboru.

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ |f(x)| < k$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ |f(x)| < k$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ své nejmenší a největší hodnoty.

$$(\exists c, d \in \langle a, b\rangle)(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ f(c) \le f(x) \le f(d)$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ |f(x)| < k$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ své nejmenší a největší hodnoty.

$$(\exists c, d \in \langle a, b\rangle)(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß 1815–1897

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice $f(x) = 0$.

$$f(a)f(b) < 0 \;\Rightarrow\; (\exists c \in (a, b))\; f(c) = 0$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice $f(x) = 0$.

$$f(a)f(b) < 0 \;\Rightarrow\; (\exists c \in (a, b))\; f(c) = 0$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

$$\begin{aligned}(\exists c, d \in \langle a, b\rangle)(\forall x \in \langle a, b\rangle)\; f(c) \le f(x) \le f(d)\\ \& \; (\forall y \in \langle f(c), f(d)\rangle)(\exists \xi \in \langle a, b\rangle)\; f(\xi) = y\end{aligned}$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice $f(x) = 0$.

$$f(a)f(b) < 0 \;\Rightarrow\; (\exists c \in (a, b))\; f(c) = 0$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

$$\begin{aligned}&(\exists c, d \in \langle a, b\rangle)(\forall x \in \langle a, b\rangle)\; f(c) \le f(x) \le f(d)\\ &\qquad \& \;(\forall y \in \langle f(c), f(d)\rangle)(\exists \xi \in \langle a, b\rangle)\; f(\xi) = y\end{aligned}$$

Bernard Bolzano 1781–1848

Limita funkce

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě x_0 limitu a:

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má ve vlastním bodě x_0 vlastní limitu a:

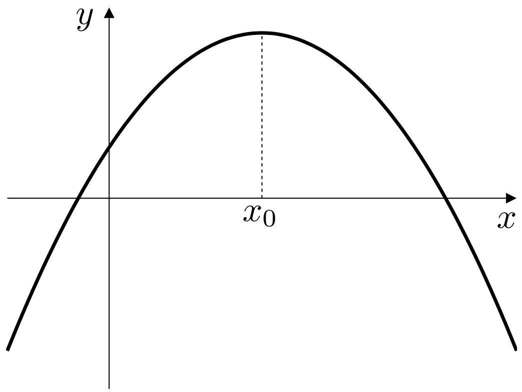
Představa a pojem limity

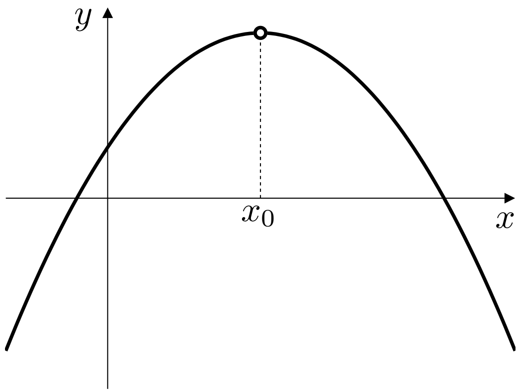
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

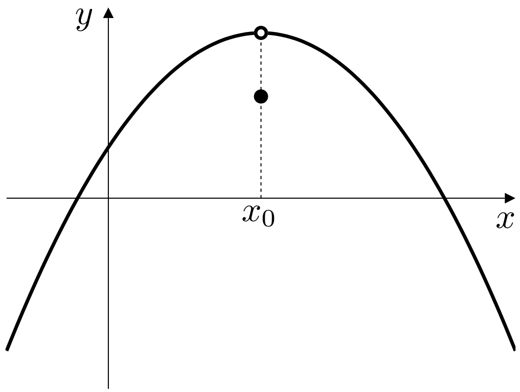
Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



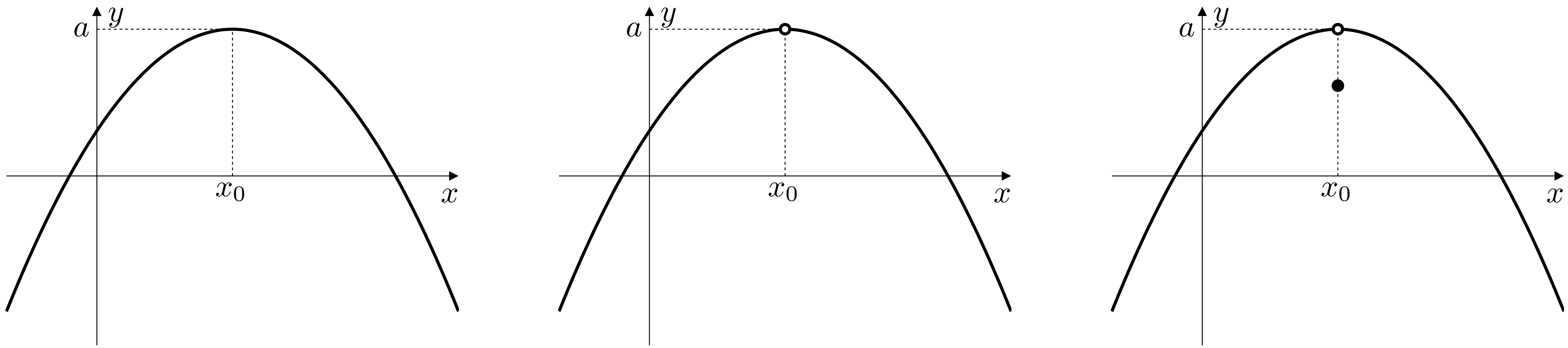




Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

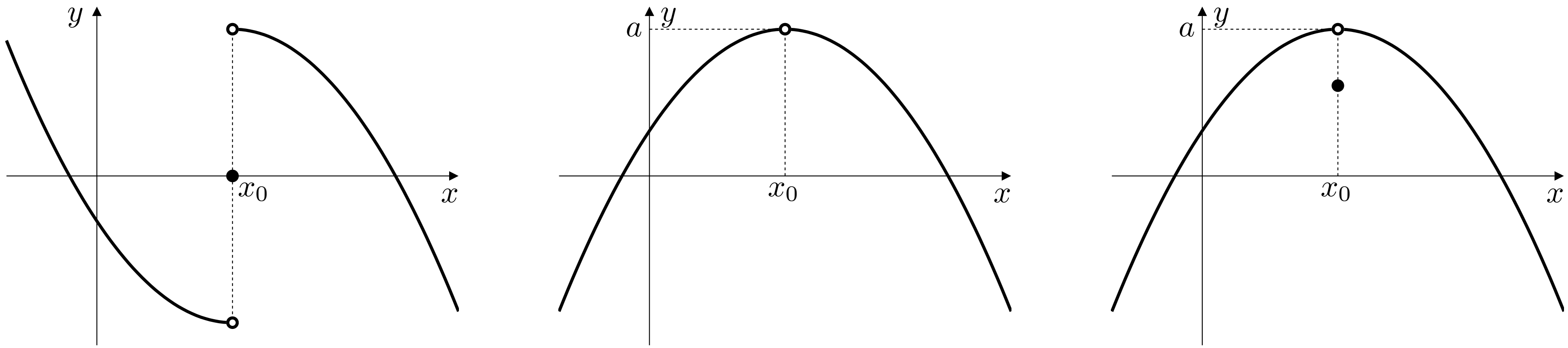


Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

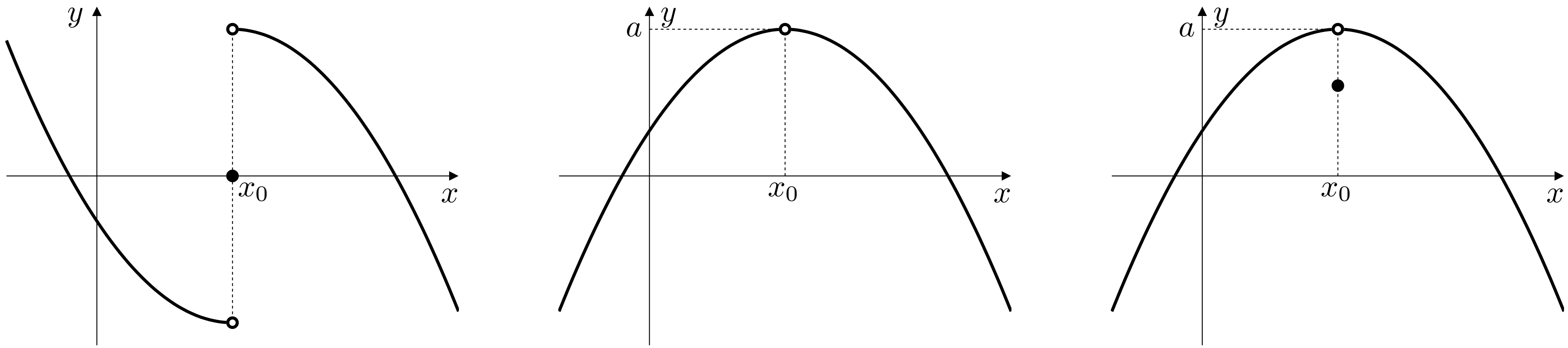
Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



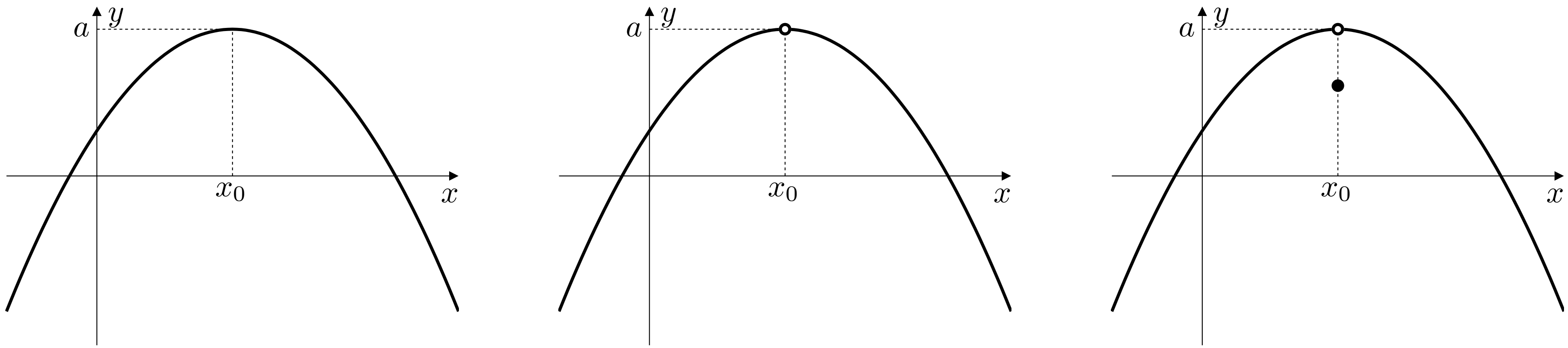
Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a.

Při jakémkoliv přibližování se nezávisle proměnné k hodnotě x_0 (ale nesplynutí s ní) se příslušné hodnoty závisle proměnné nutně přiblíží k hodnotě a.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



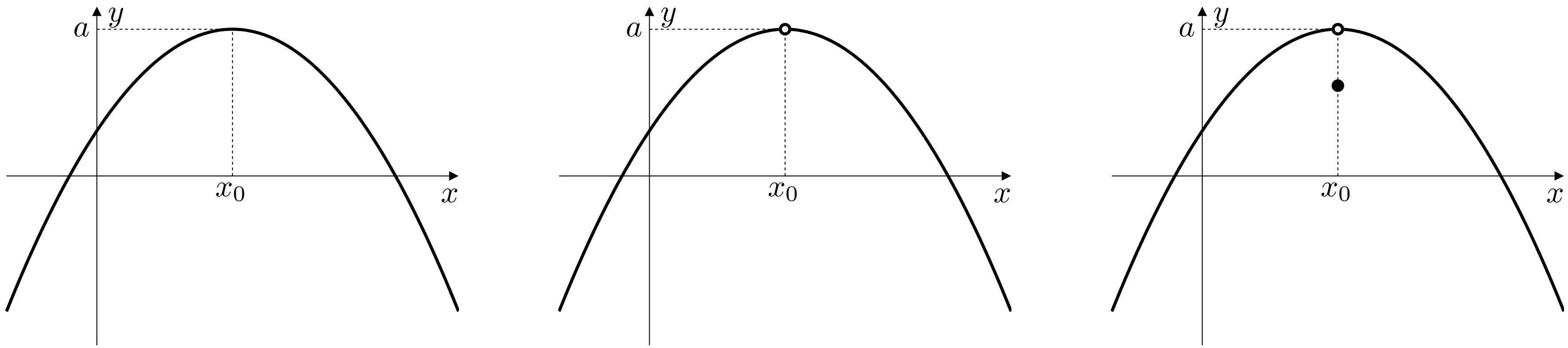
Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a.

Při jakémkoliv přibližování se nezávisle proměnné k hodnotě x_0 (ale nesplynutí s ní) se příslušné hodnoty závisle proměnné nutně přiblíží k hodnotě a.

$$\left(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}\right) \; \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

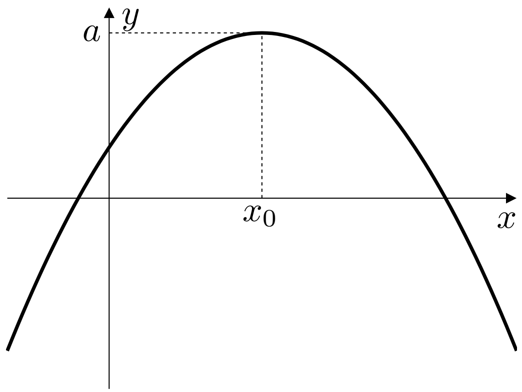


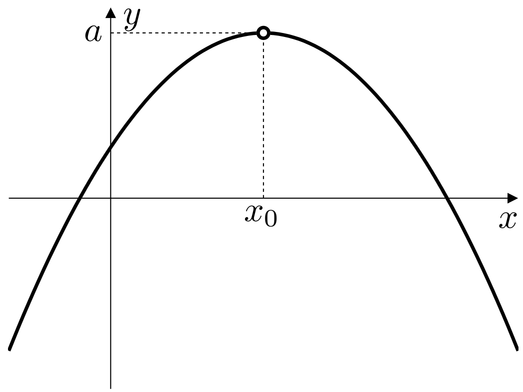
Pokud je funkce f spojitá v x_0, tak a se rovná funkční hodnotě $f(x_0)$.

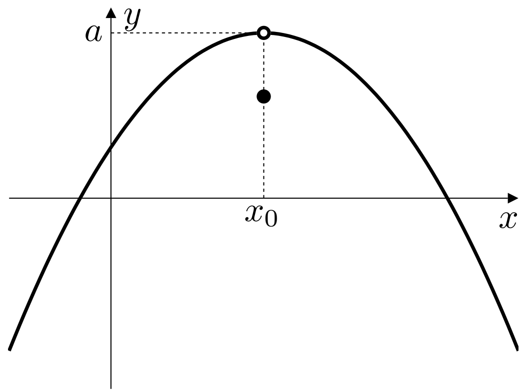
Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:







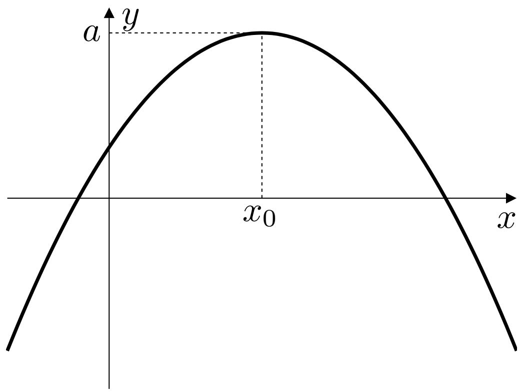
Pokud je funkce f spojitá v x_0, tak a se rovná funkční hodnotě $f(x_0)$.

Pokud funkce f není spojitá v x_0, tak a je taková hodnota, že dodefinování nebo změna funkční hodnoty v x_0 splňující rovnost $f(x_0) = a$, změní funkci f na funkci spojitou v x_0.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



Pokud je funkce f spojitá v x_0, tak a se rovná funkční hodnotě $f(x_0)$.

Pokud funkce f není spojitá v x_0, tak a je taková hodnota, že dodefinování nebo změna funkční hodnoty v x_0 splňující rovnost $f(x_0) = a$, změní funkci f na funkci spojitou v x_0.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\left(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}\right)\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\left(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}\right)\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

Předpokládáme, že definiční obor funkce f je takový, že posloupnost

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f),\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

existuje, tj. že v každém ryzím okolí bodu x_0 jsou hodnoty z definičního oboru funkce f.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}\big)\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Předpokládáme, že definiční obor funkce f je takový, že posloupnost

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f),\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

existuje, tj. že v každém ryzím okolí bodu x_0 jsou hodnoty z definičního oboru funkce f.

x_0 je *hromadný bod* definičního oboru.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}\big)\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

x_0 je *hromadný bod* definičního oboru.

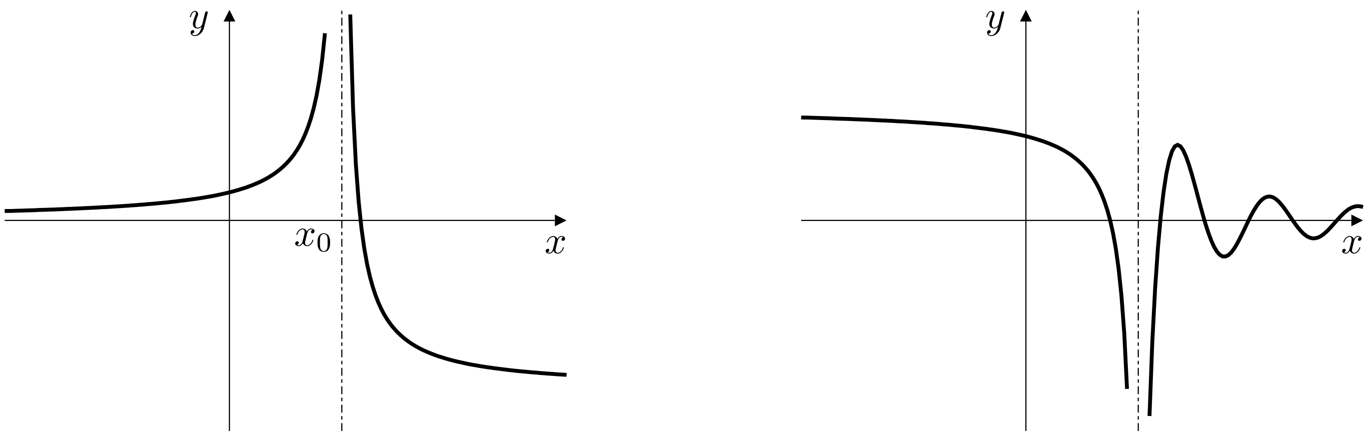
$x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > H$$

$$\left(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}\right) \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < H$$

$$\left(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}\right) \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$



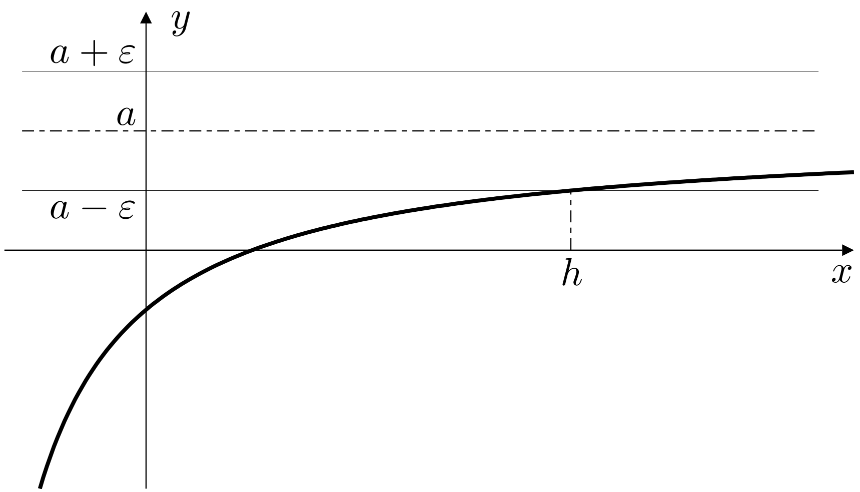
Vlastní limita v nevlastním bodě:

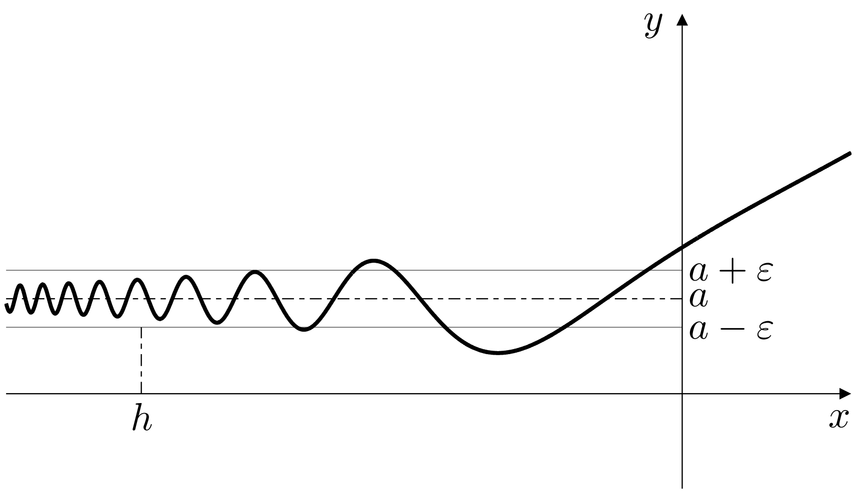
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a: \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x > h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\big(\forall\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a: \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x < h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\big(\forall\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$





Nevlastní limita v nevlastním bodě:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x > h \Rightarrow f(x) > H$$
$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x > h \Rightarrow f(x) < H$$
$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x < h \Rightarrow f(x) > H$$
$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x < h \Rightarrow f(x) < H$$
$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) \; \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big)\&\big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big] \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$x \neq 1: \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1},$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$x \neq 1 : \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ je spojitá v } x_0 = 1$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big)\&\big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = 0$

$$x \neq 1: \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ je spojitá v } x_0 = 1$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) \ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) \, \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \sin n\pi = 0$$

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists\eta)(\exists g)(\forall x \in D(f)\cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big)\&\big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\sin n\pi = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2n+1)\pi} = 0, \qquad \sin\tfrac{1}{2}(2n+1)\pi = (-1)^n$$

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists\eta)(\exists g)(\forall x \in D(f)\cap D(g))\ \big(0<|x-x_0|<\eta \Rightarrow f(x)=g(x)\big)\&\big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \sin n\pi = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = 0, \quad \sin \tfrac{1}{2}(2n+1)\pi = (-1)^n$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \operatorname{sgn}(a_n)\infty$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \operatorname{sgn}(a_n)(-1)^n\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $$\lim_{x \to \infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \operatorname{sgn}(a_n)\infty$$
  $$\lim_{x \to -\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \operatorname{sgn}(a_n)(-1)^n\infty$$
- $$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & m = n \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right)\infty, & m < n \end{cases}$$
  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & m = n \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right)(-1)^{n+m}\infty, & m < n \end{cases}$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \qquad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

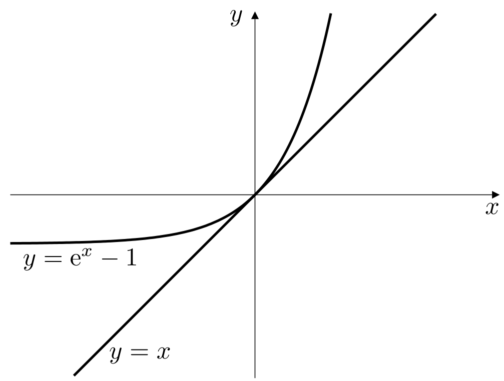
„Standardní limity:“

- $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

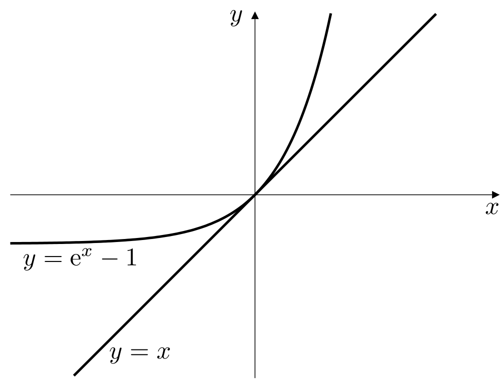
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



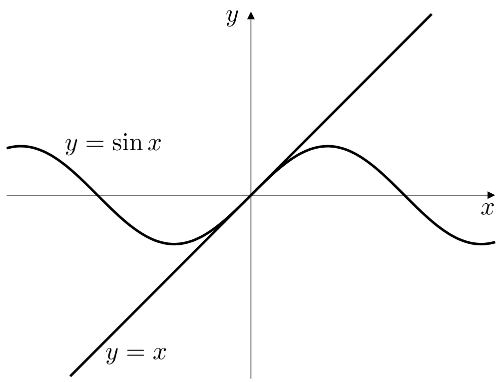
$$\lim_{x \to x_0} f(x), \qquad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$



- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Příklady

$$\lim_{x \to -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3}$$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3}$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

Příklady

$$\lim_{x\to -2}\frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3}=\frac{6+4-8}{12-8-3}=2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0=-2$

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}$$

Příklady

$$\lim_{x\to-2}\frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3}=\frac{6+4-8}{12-8-3}=2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0=-2$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{-4}{-1}=4$$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}$$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}$$ neexistuje

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}$$ neexistuje

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-3x+2}{7-4x^3}$$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-3x+2}{7-4x^3} = \lim_{x\to \infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{7}{x^3}-4} = \frac{2-0+0}{0-4} = -\frac{1}{2}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(e^x\right)^2 - 1}{\left(e^x\right)^2 + 1} = -1$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 1}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2 + 1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{\frac{3}{2}}-2x}{2x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}}{2+\frac{4}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x-2}-3^{x+1}}{2^{x-2}+3^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}-3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}+3}=-9$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^{x}\right)^2-1}{\left(e^{x}\right)^2+1}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=-1$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{\frac{3}{2}}-2x}{2x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}}{2+\frac{4}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x-2}-3^{x+1}}{2^{x-2}+3^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}-3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}+3}=-9$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\mathrm{e}^x)^2-1}{(\mathrm{e}^x)^2+1}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sgn}(x)\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x} = 0$$

Příklady

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{x}$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}3\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x}=3$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}3\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x}=3$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x}=1$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}3\frac{e^{3x}-1}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}=3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}5x}$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x\cos 5x}{5\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x}\frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x\cos 5x}{5\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x\cos 5x}{5\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x}\frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$