

# Diferenciální počet

M1030 Matematika pro biology  
6. a 13. 12. 2022

## Derivace

Derivace funkce v bodě

Operace s derivacemi

Derivace jako funkce

Derivace elementárních funkcí

Příklady

Diferenciál

---

Užití derivací

---

# Derivace

# Derivace funkce v bodě

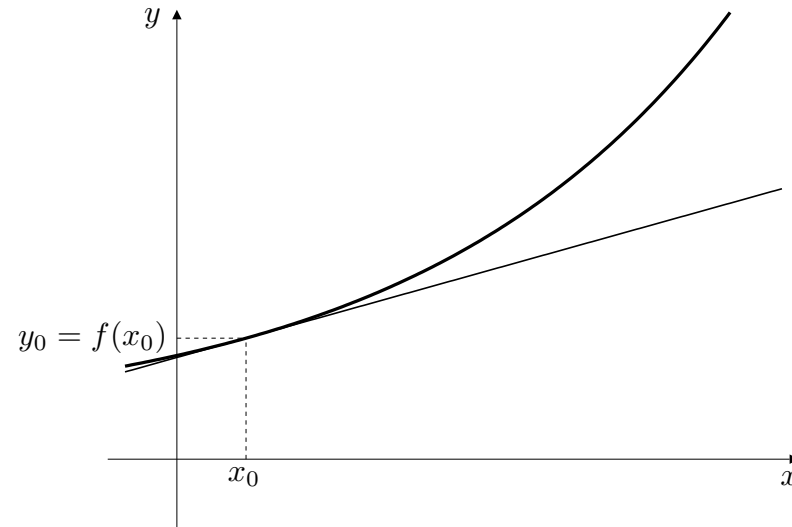
Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

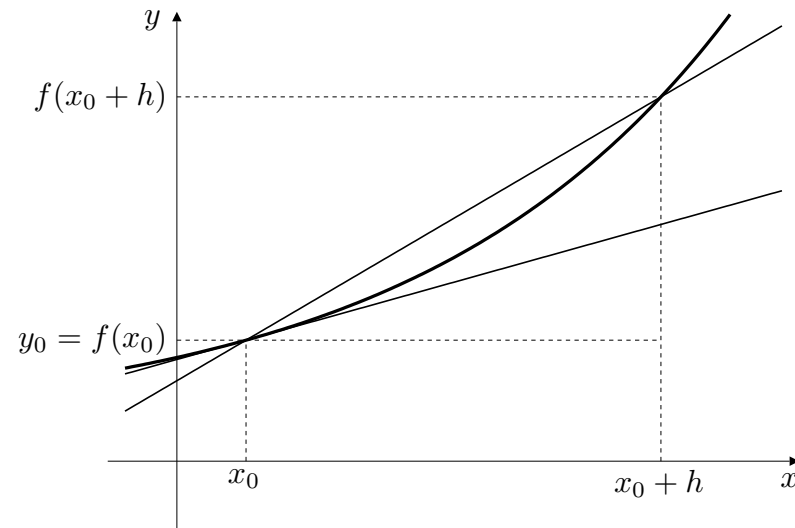
najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

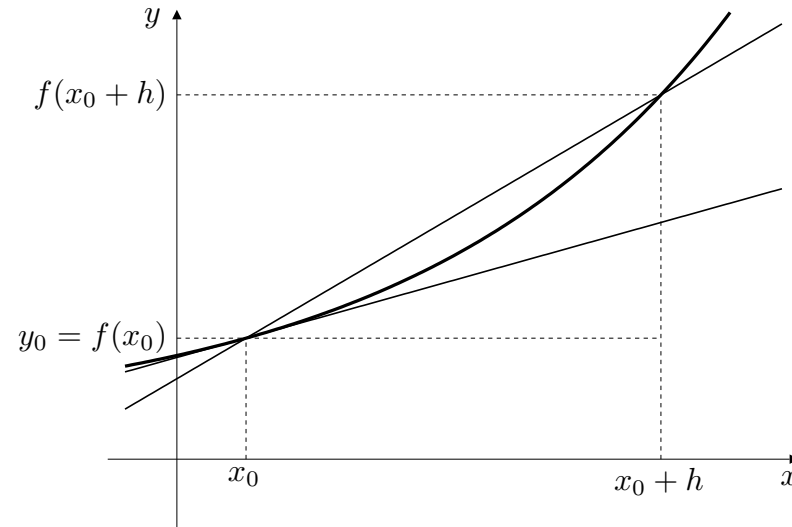
najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$

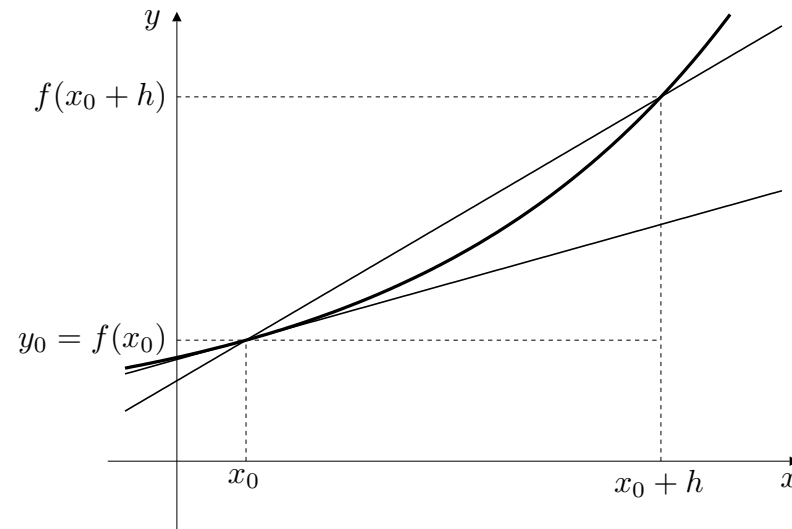


Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ : 
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



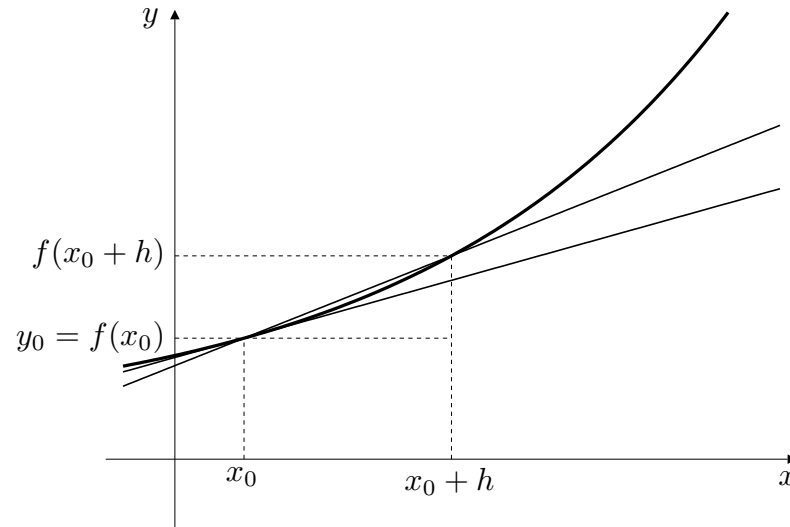
Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Pokud se  $h$  „přibližuje“ k 0, bod  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  se „přibližuje“ k bodu  $(x_0, f(x_0))$ .

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

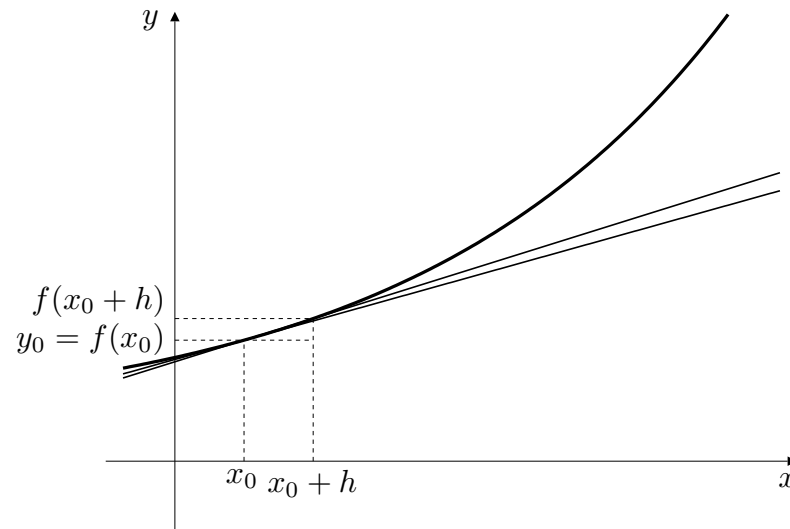
Pokud se  $h$  „přibližuje“ k 0, bod  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  se „přibližuje“ k bodu  $(x_0, f(x_0))$ .



# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



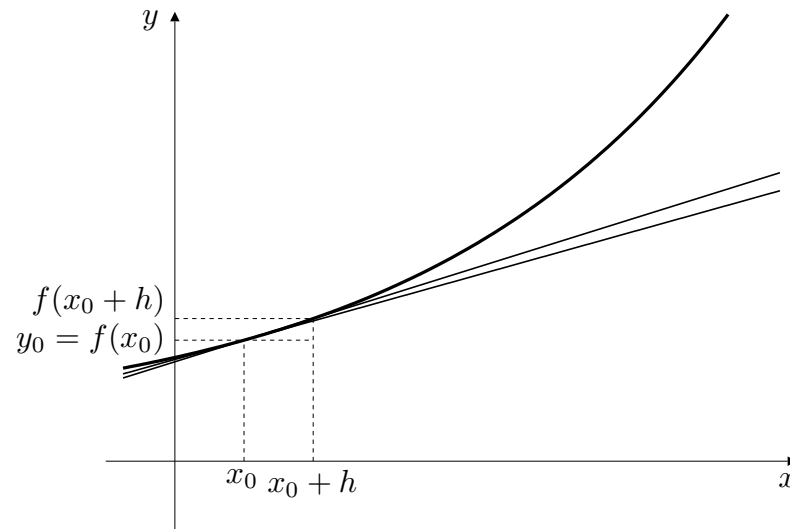
Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Pokud se  $h$  „přibližuje“ k 0, bod  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  se „přibližuje“ k bodu  $(x_0, f(x_0))$ .

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



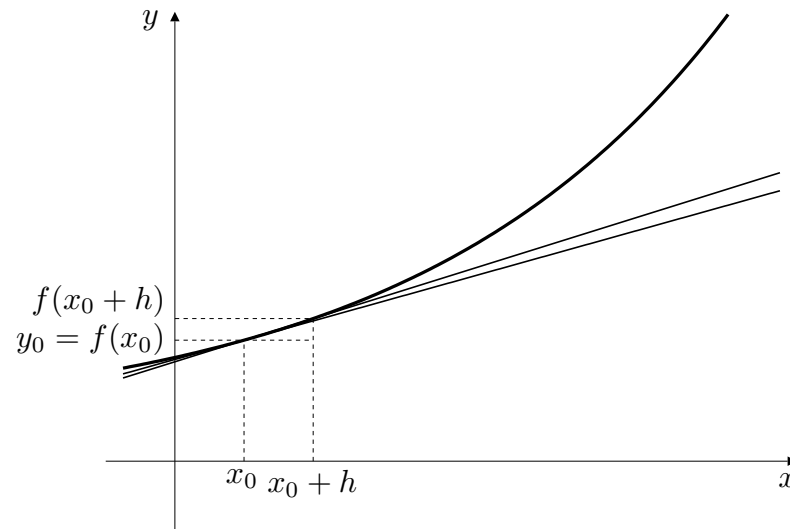
Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Pokud se  $h$  „přibližuje“ k 0, bod  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  se „přibližuje“ k bodu  $(x_0, f(x_0))$ . Nakonec tyto body splynou a sečna splyne s tečnou.

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Směrnice tečny je rovna

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

# Derivace funkce v bodě

*Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je*

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$x = x_0 + h$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$x = x_0 + h$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Delta x_0 = (x_0 + h) - x_0 = h$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta y_0$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .



# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .

$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1,$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} f(x) = x^2, \quad x_0 = 1, \quad f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} f(x) = x^2, \quad x_0 = 1, \quad f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

Rovnice tečny:  $y - 1 = 2(x - 1)$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} f(x) = x^2, \quad x_0 = 1, \quad f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

Rovnice tečny:  $y = 2x - 1$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Poznámky:**

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Poznámky:**

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

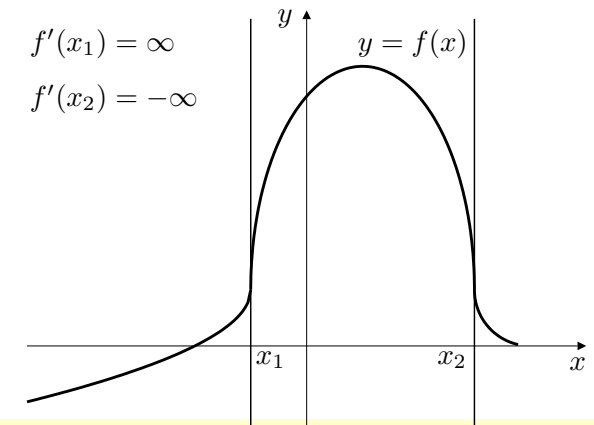
Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

## Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.
- Derivace může být nevlastní.



# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

## Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.
- Derivace může být nevlastní.
- Funkce je spojitá bodě, v němž má vlastní derivaci.



# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

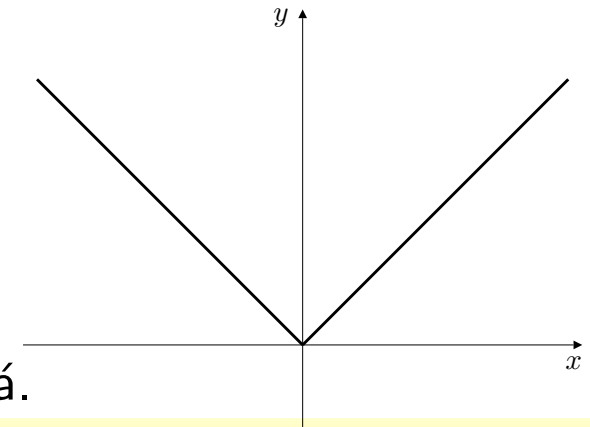
Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

## Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.
- Derivace může být nevlastní.
- Funkce je spojitá bodě, v němž má vlastní derivaci.
- Funkce nemusí mít vlastní derivaci v bodě, v němž je spojitá.



# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x_0 + h) - cf(x_0)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = cf'(x_0)$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)\end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

$$\begin{aligned}(f - g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - g'(x_0)\end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$



# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \right) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)\end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
- $(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$

# Derivace jako funkce

Bud'  $f$  funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce  $f$ , ve kterých existuje uvedená limita.



# Derivace jako funkce

Bud'  $f$  funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce  $f$ , ve kterých existuje uvedená limita.

Tato  $f'$  funkce je odvozena – derivována – z funkce  $f$ , nazývá se *(první) derivace funkce  $f$* .

# Derivace jako funkce

Bud'  $f$  funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce  $f$ , ve kterých existuje uvedená limita.

Tato  $f'$  funkce je odvozena – derivována – z funkce  $f$ , nazývá se *(první) derivace funkce  $f$* .

Analogicky lze z funkce  $f'$  odvodit funkci  $f''$ . Nazveme ji *druhá derivace funkce  $f$* .

# Derivace jako funkce

Bud'  $f$  funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce  $f$ , ve kterých existuje uvedená limita.

Tato  $f'$  funkce je odvozena – derivována – z funkce  $f$ , nazývá se *(první) derivace funkce  $f$* .

Analogicky lze z funkce  $f'$  odvodit funkci  $f''$ . Nazveme ji *druhá derivace funkce  $f$* .

Stejně tvoříme derivaci třetí, čtvrtou, pátou ...,  $f'''$ ,  $f^{(4)}$ ,  $f^{(5)}$ ...

# Derivace elementárních funkcí

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n:$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x:$

$$f(x) = \ln x$$

$$e^{f(x)} = x \quad | \prime$$

$$e^{f(x)} f'(x) = 1$$

$$x f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x:$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$ :  $f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$ :

$$(\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

- $f(x) = x^a:$

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x:$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \cos x + \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \left(\sin \frac{1}{2}h\right)^2}{h} = \\ &= \cos x - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}h = \cos x - \sin x \cdot 1 \cdot 0 = \cos x \end{aligned}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$

- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$

- $f(x) = \cos x:$

$$f'(x) = (\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x:$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$

- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$

- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$

- $f(x) = \operatorname{tg} x:$

$$f'(x) = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x: f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x: f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
- $f(x) = \operatorname{cotg} x:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$

- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$

- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$

- $f(x) = \operatorname{tg} x: f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

- $f(x) = \operatorname{cotg} x: f'(x) = (\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = -\frac{\frac{1}{(\cos x)^2}}{(\operatorname{tg} x)^2} = -\frac{1}{(\cos x)^2} \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x: f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
- $f(x) = \operatorname{cotg} x: f'(x) = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :

$$f(x) = \arcsin x$$

$$\sin f(x) = x \quad |'$$

$$f'(x) \cos f(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin f(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :

# Derivace elementárních funkcí

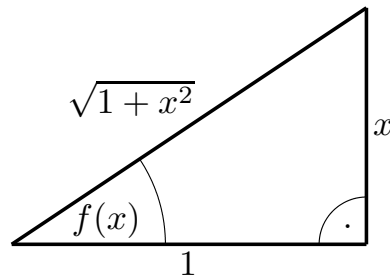
- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{tg} f(x) = x \quad |'$$

$$f'(x) \frac{1}{(\cos f(x))^2} = 1$$

$$f'(x) = (\cos f(x))^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 = \frac{1}{1+x^2}$$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2})$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \operatorname{arctg} x: f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \operatorname{arccotg} x: f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2}):$

$$f'(x) = \frac{1}{x \pm \sqrt{1+x^2}} \left( 1 \pm \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{\sqrt{1+x^2} \pm x}{(x \pm \sqrt{1+x^2}) \sqrt{1+x^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2})$ :  $f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x: f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x: f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2}): f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \operatorname{arctg} x: f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \operatorname{arccotg} x: f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2}): f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}: f'(x) = \left(\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))\right)' =$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x: f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x: f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2}): f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}: f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

# Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{(\sin x)^2}$
$e^x$	$e^x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln(1 \pm \sqrt{1+x^2})$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$\frac{1}{1-x^2}$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$



# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left( \frac{3x - 2}{x^3 - 8} \right)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left( \frac{3x - 2}{x^3 - 8} \right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{x}$$



# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{x}$$

$$((\sin x)^x)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{x}$$

$$((\sin x)^x)' = (e^{x \ln \sin x})' = e^{x \ln \sin x} \left(\ln \sin x + x \frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cotg x)$$

Derivace

---

**Diferenciál**

Pojem diferenciálu

Užití diferenciálu

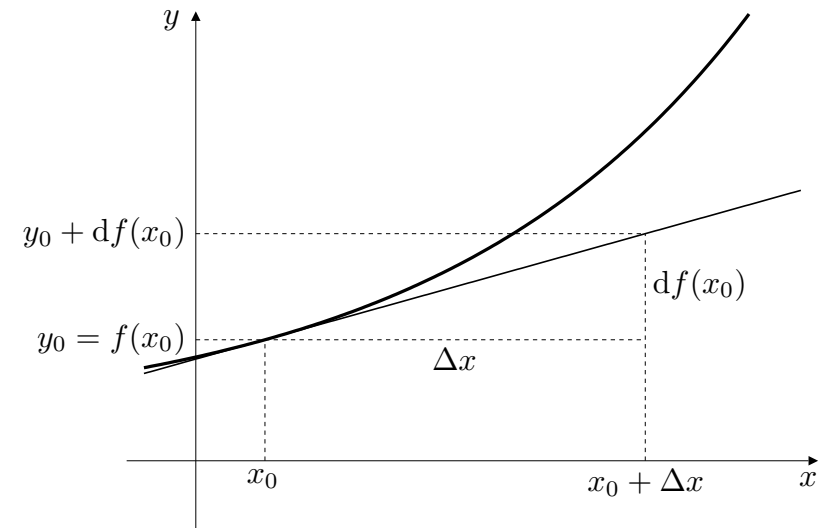
Užití derivací

---

# Diferenciál

# Pojem diferenciálu

*Diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$ ,  $df(x_0)$ : přírůstek funkce naměřený na tečně.*



# Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$ ,  $df(x_0)$ : přírůstek funkce naměřený na tečně.

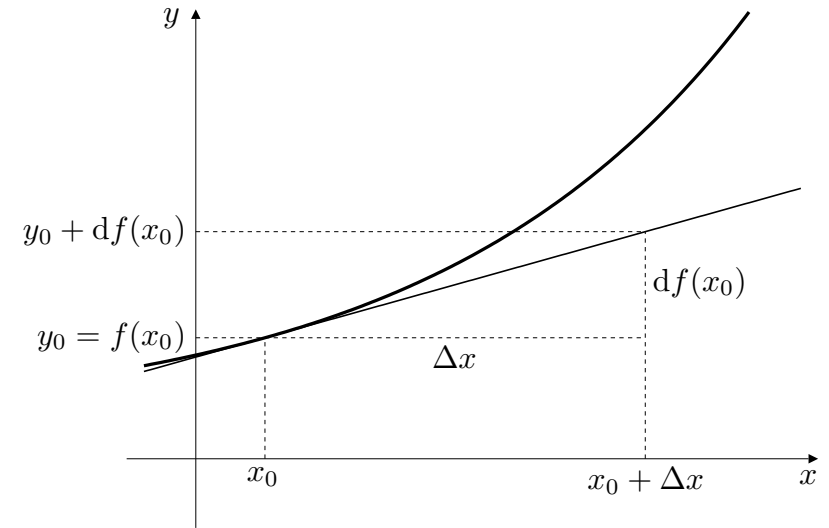
Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$$

$$\frac{df(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$



# Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$ ,  $df(x_0)$ : přírůstek funkce naměřený na tečně.

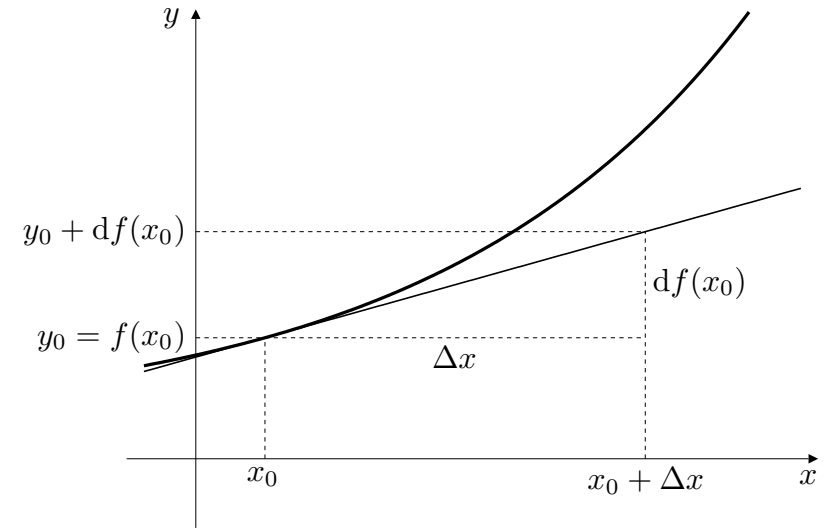
Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$$

$$\frac{df(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$



Diferenciál funkce  $f$  v obecném bodě  $x$ :

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x$$

# Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$ ,  $df(x_0)$ : přírůstek funkce naměřený na tečně.

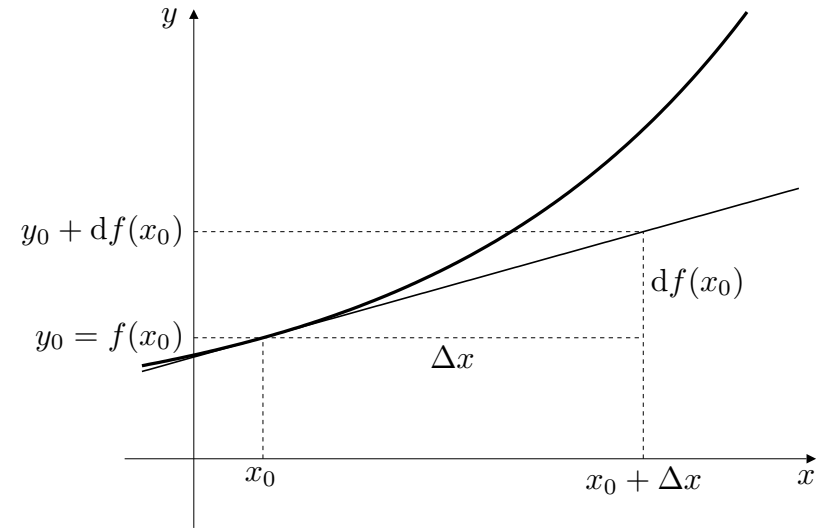
Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$$

$$\frac{df(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$



Diferenciál funkce  $f$  v obecném bodě  $x$ :

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x$$

Pro funkci  $g$  danou předpisem  $g(x) = x$  platí  $dx = dg(x) = g'(x)\Delta x = \Delta x$ .

# Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$ ,  $df(x_0)$ : přírůstek funkce naměřený na tečně.

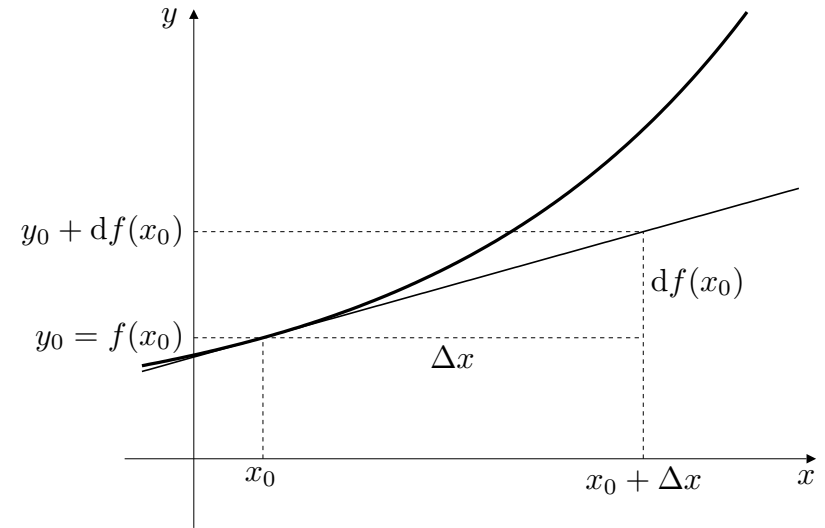
Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$$

$$\frac{df(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$



Diferenciál funkce  $f$  v obecném bodě  $x$ :

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x$$

Pro funkci  $g$  danou předpisem  $g(x) = x$  platí  $dx = dg(x) = g'(x)\Delta x = \Delta x$ .

Proto lze psát

$$dy = f'(x)dx, \quad \text{neboli} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$



## Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\sqrt[3]{2}$ .

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\sqrt[3]{2}$ .

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2, \sqrt[3]{2} = f(2),$$

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\sqrt[3]{2}$ .

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2, \sqrt[3]{2} = f(2),$$

$$x_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}, f(x_0) = \frac{5}{4}, f'(x_0) = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{75}, \Delta x = 2 - \frac{125}{64} = \frac{3}{64},$$

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\sqrt[3]{2}$ .

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2, \sqrt[3]{2} = f(2),$$

$$x_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}, f(x_0) = \frac{5}{4}, f'(x_0) = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{75}, \Delta x = 2 - \frac{125}{64} = \frac{3}{64},$$

$$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75} \frac{3}{64} = \frac{126}{100} = \mathbf{1,26}$$

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\sqrt[3]{2}$ .

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2, \sqrt[3]{2} = f(2),$$

$$x_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}, f(x_0) = \frac{5}{4}, f'(x_0) = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{75}, \Delta x = 2 - \frac{125}{64} = \frac{3}{64},$$

$$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75} \frac{3}{64} = \frac{126}{100} = \mathbf{1,26}$$

Přesná hodnota:  $\sqrt[3]{2} \doteq 1,25992$ .

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\log_{10} 9$ .



# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\log_{10} 9$ .

$$f(x) = \log_{10} x, \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}, \quad \ln 10 \doteq 2,3026,$$

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\log_{10} 9$ .

$$f(x) = \log_{10} x, \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}, \quad \ln 10 \doteq 2,3026,$$

$$x_0 = 10, \quad f(x_0) = \log_{10} 10 = 1, \quad \Delta x = -1,$$

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\log_{10} 9$ .

$$f(x) = \log_{10} x, \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}, \quad \ln 10 \doteq 2,3026,$$

$$x_0 = 10, \quad f(x_0) = \log_{10} 10 = 1, \quad \Delta x = -1,$$

$$\log_{10} 9 = f(9) \approx 1 - \frac{1}{23,026} \doteq \mathbf{0,957}$$

# Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

**Příklady:** Přibližně vypočítejte  $\log_{10} 9$ .

$$f(x) = \log_{10} x, \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}, \quad \ln 10 \doteq 2,3026,$$

$$x_0 = 10, \quad f(x_0) = \log_{10} 10 = 1, \quad \Delta x = -1,$$

$$\log_{10} 9 = f(9) \approx 1 - \frac{1}{23,026} \doteq \mathbf{0,957}$$

Přesná hodnota:  $\log_{10} 9 \doteq 0,9542$ .

Derivace

---

Diferenciál

---

**Užití derivací**

Konstrukce tečen

Aproximace funkcí

Taylorův polynom

Limity neurčitých výrazů

Průběh funkce

## Užití derivací

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

**Příklady:** Najděte tečnu k parabole dané rovnicí  $y = 1 - (x - 1)^2$  v bodě  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ .



# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

**Příklady:** Najděte tečnu k parabole dané rovnicí  $y = 1 - (x - 1)^2$  v bodě  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ .

$$f(x) = 1 - (x - 1)^2, \quad x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = \frac{3}{4},$$

$$f'(x) = 0 - 2(x - 1) = 2 - 2x, \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 - 3 = -1$$

$$y = \frac{3}{4} - (x - \frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - x$$

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

**Příklady:** Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí  $x^2 + y^2 = r^2$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

**Příklady:** Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí  $x^2 + y^2 = r^2$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

**Příklady:** Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí  $x^2 + y^2 = r^2$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ; derivujeme obě strany této rovnosti.

$$f'(x) = \pm\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} (-2x) = \mp \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

**Příklady:** Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí  $x^2 + y^2 = r^2$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ; derivujeme obě strany této rovnosti.

$$f'(x) = \pm\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} (-2x) = \mp \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad f'(x_0) = \mp \frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp \frac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\frac{x_0}{y_0}$$

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

**Příklady:** Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí  $x^2 + y^2 = r^2$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ; derivujeme obě strany této rovnosti.

$$f'(x) = \pm\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} (-2x) = \mp \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad f'(x_0) = \mp \frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp \frac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\frac{x_0}{y_0}$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

**Příklady:** Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí  $x^2 + y^2 = r^2$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ; derivujeme obě strany této rovnosti.

$$f'(x) = \pm\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} (-2x) = \mp \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad f'(x_0) = \mp \frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp \frac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\frac{x_0}{y_0}$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

$$x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2$$

# Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici  $q$  a prochází bodem  $(x_0, y_0)$  má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

**Příklady:** Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí  $x^2 + y^2 = r^2$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ; derivujeme obě strany této rovnosti.

$$f'(x) = \pm\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} (-2x) = \mp \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad f'(x_0) = \mp \frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp \frac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\frac{x_0}{y_0}$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

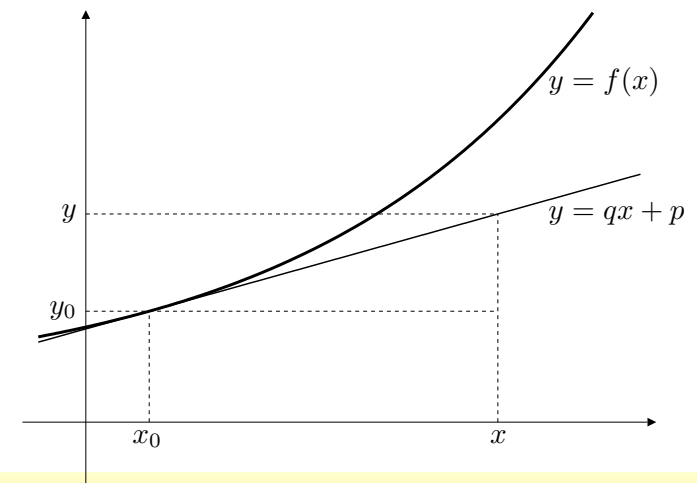
$$x_0x + y_0y = r^2$$



# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  lineární funkcí

$$y = qx + p$$



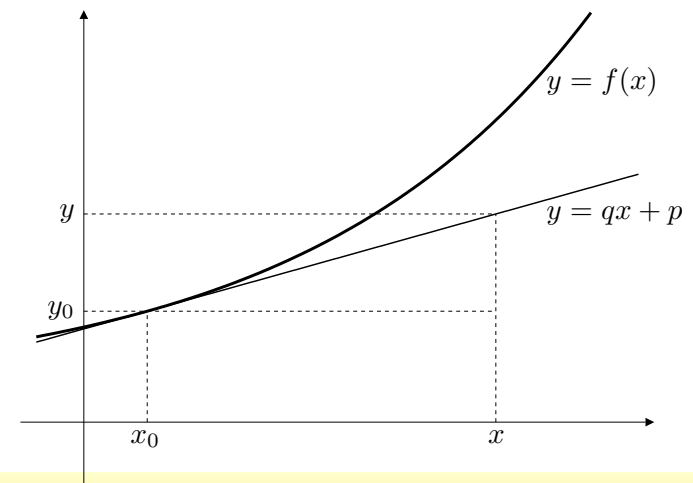
# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  lineární funkcí

$$y = qx + p$$

Graf funkce  $f$  nahradíme jeho tečnou v bodě  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ , tj.

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$



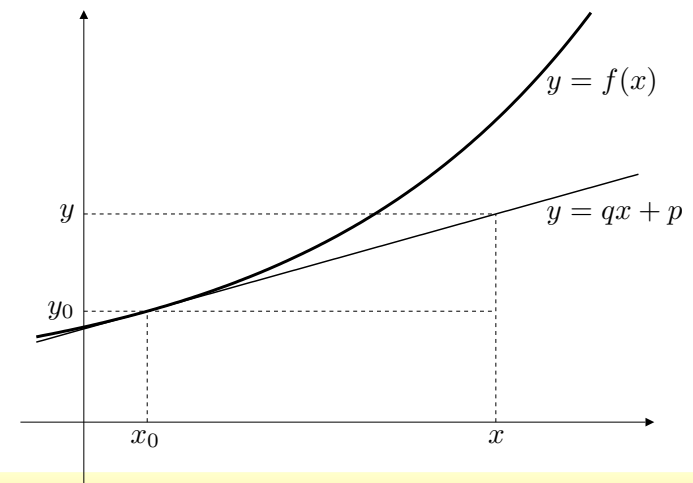
# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce  $f$  nahradíme jeho tečnou v bodě  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ , tj.

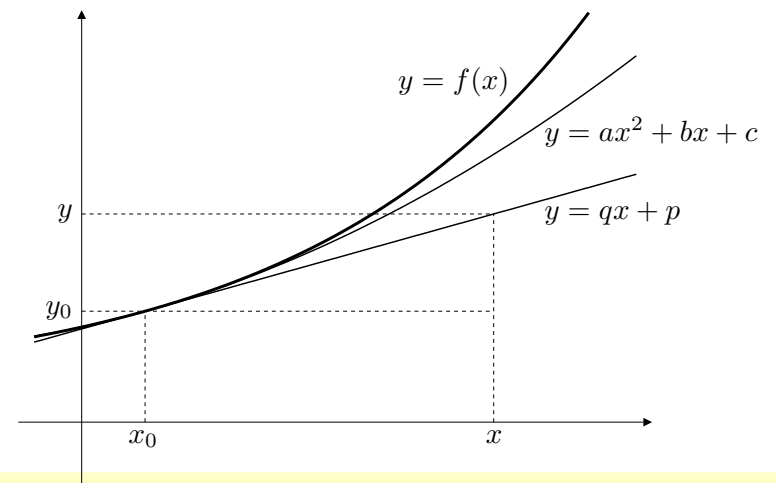
$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$



# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$



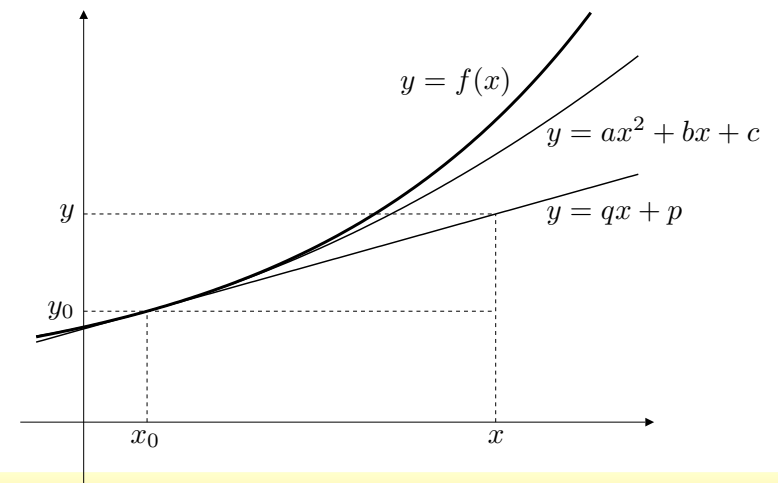
# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme  $f(x_0) = T_2(x_0)$ ,  $f'(x_0) = T_2'(x_0)$ ,  $f''(x_0) = T_2''(x_0)$ , tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + bx_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b &= f'(x_0) \\ 2a &= f''(x_0) \end{aligned}$$



# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme  $f(x_0) = T_2(x_0)$ ,  $f'(x_0) = T_2'(x_0)$ ,  $f''(x_0) = T_2''(x_0)$ , tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + bx_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b &= f'(x_0) \\ 2a &= f''(x_0) \end{aligned}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé parametry  $a, b, c$ .

# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme  $f(x_0) = T_2(x_0)$ ,  $f'(x_0) = T_2'(x_0)$ ,  $f''(x_0) = T_2''(x_0)$ , tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + bx_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b &= f'(x_0) \\ 2a &= f''(x_0) \end{aligned}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé parametry  $a, b, c$ .

Řešení  $a = \frac{1}{2}f''(x_0)$ ,  $b = f' - x_0f''(x_0)$ ,  $c = f(x_0) - x_0f'(x_0) + \frac{1}{2}x_0^2f''(x_0)$

# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme  $f(x_0) = T_2(x_0)$ ,  $f'(x_0) = T_2'(x_0)$ ,  $f''(x_0) = T_2''(x_0)$ , tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + bx_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b &= f'(x_0) \\ 2a &= f''(x_0) \end{aligned}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé parametry  $a, b, c$ .

Řešení  $a = \frac{1}{2}f''(x_0)$ ,  $b = f' - x_0f''(x_0)$ ,  $c = f(x_0) - x_0f'(x_0) + \frac{1}{2}x_0^2f''(x_0)$

Tedy

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$



# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

---

**Příklad:** Funkci  $y = \cotg x$  aproximujte v okolí bodu  $x_0 = \frac{1}{4}\pi$  funkcí kvadratickou.

# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

---

**Příklad:** Funkci  $y = \cotg x$  aproximujte v okolí bodu  $x_0 = \frac{1}{4}\pi$  funkcí kvadratickou.

$$\cotg x$$

$$\cotg\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = 1$$

$$(\cotg x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

$$-\frac{1}{\left(\sin \frac{1}{4}\pi\right)^2} = -2$$

$$(\cotg x)'' = 2\frac{\cos x}{(\sin x)^3}$$

$$2\frac{\cos \frac{1}{4}\pi}{\left(\sin \frac{1}{4}\pi\right)^3} = 4$$

# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

---

**Příklad:** Funkci  $y = \cotg x$  aproximujte v okolí bodu  $x_0 = \frac{1}{4}\pi$  funkcí kvadratickou.

$$\begin{array}{ll} \cotg x & \cotg\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = 1 \\ (\cotg x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2} & -\frac{1}{\left(\sin \frac{1}{4}\pi\right)^2} = -2 \\ (\cotg x)'' = 2\frac{\cos x}{(\sin x)^3} & 2\frac{\cos \frac{1}{4}\pi}{\left(\sin \frac{1}{4}\pi\right)^3} = 4 \end{array}$$

Tedy

$$\cotg x \approx 1 - 2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + 2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2$$

# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

---

**Příklad:**  $\sqrt[3]{2}$

# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

---

**Příklad:**  $\sqrt[3]{2}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = \frac{125}{64}, \quad f(x_0) = \frac{5}{4}, \quad x = 2, \quad x - x_0 = \frac{3}{64},$$

# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

---

**Příklad:**  $\sqrt[3]{x}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = \frac{125}{64}, \quad f(x_0) = \frac{5}{4}, \quad x = 2, \quad x - x_0 = \frac{3}{64},$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f'(x_0) = \frac{16}{75}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \left(\frac{4}{5}\right)^5 = -\frac{2048}{28125},$$

# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

---

**Příklad:**  $\sqrt[3]{2}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = \frac{125}{64}, \quad f(x_0) = \frac{5}{4}, \quad x = 2, \quad x - x_0 = \frac{3}{64},$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f'(x_0) = \frac{16}{75}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, \quad f''(x_0) = -\frac{2}{9} \left(\frac{4}{5}\right)^5 = -\frac{2048}{28125},$$

$$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75} \cdot \frac{3}{64} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2048}{28125} \cdot \left(\frac{3}{64}\right)^2$$



# Aproximace funkcí

Funkci  $y = f(x)$  aproximujeme v okolí bodu  $x_0$  kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

---

**Příklad:**  $\sqrt[3]{2}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = \frac{125}{64}, \quad f(x_0) = \frac{5}{4}, \quad x = 2, \quad x - x_0 = \frac{3}{64},$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f'(x_0) = \frac{16}{75}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, \quad f''(x_0) = -\frac{2}{9} \left(\frac{4}{5}\right)^5 = -\frac{2048}{28125},$$

$$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75} \cdot \frac{3}{64} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2048}{28125} \cdot \left(\frac{3}{64}\right)^2 = \frac{453571}{360000} \doteq 1,25992$$

# Taylorův polynom

Motivace:  $\pi = 3,141592654\dots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + 5 \cdot \frac{1}{10000} + \dots$

# Taylorův polynom

Motivace:  $\pi = 3,141592654\dots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + 5 \cdot \frac{1}{10000} + \dots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

# Taylorův polynom

Motivace:  $\pi = 3,141592654\dots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + 5 \cdot \frac{1}{10000} + \dots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem  $x$ ;

# Taylorův polynom

Motivace:  $\pi = 3,141592654\dots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + 5 \cdot \frac{1}{10000} + \dots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem  $x$ ;  
platí pro  $|x| < 1$ .

# Taylorův polynom

Motivace:  $\pi = 3,141592654\dots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + 5 \cdot \frac{1}{10000} + \dots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem  $x$ ;  
platí pro  $|x| < 1$ .

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \dots$$

# Taylorův polynom

Motivace:  $\pi = 3,141592654\dots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + 5 \cdot \frac{1}{10000} + \dots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem  $x$ ;  
platí pro  $|x| < 1$ .

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \dots$$
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 6, \dots$$

# Taylorův polynom

Motivace:  $\pi = 3,141592654\dots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + 5 \cdot \frac{1}{10000} + \dots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem  $x$ ;  
platí pro  $|x| < 1$ .

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \dots$$
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 6, \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots$$



# Taylorův polynom

Motivace:  $\pi = 3,141592654\dots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + 5 \cdot \frac{1}{10000} + \dots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem  $x$ ;  
platí pro  $|x| < 1$ .

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \dots$$
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 6, \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3$$

# Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

# Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

*McLaurinův polynom stupně  $n$*

# Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

*McLaurinův polynom stupně  $n$*

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

# Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

*McLaurinův polynom stupně  $n$*

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

*Taylorův polynom stupně  $n$  se středem  $x_0$ .*

---

# Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

*McLaurinův polynom stupně  $n$*

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

*Taylorův polynom stupně  $n$  se středem  $x_0$ .*

---

**Příklad:** Taylorův polynom funkce  $y = f(x) = e^x$  se středem  $x_0 = 0$ .

# Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

*McLaurinův polynom stupně  $n$*

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

*Taylorův polynom stupně  $n$  se středem  $x_0$ .*

---

**Příklad:** Taylorův polynom funkce  $y = f(x) = e^x$  se středem  $x_0 = 0$ .

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f^{(i)}(x) = e^x, \quad f^{(i)}(0) = 1 \text{ pro } i = 1, 2, 3, \dots$$

# Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

*McLaurinův polynom stupně  $n$*

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

*Taylorův polynom stupně  $n$  se středem  $x_0$ .*

---

**Příklad:** Taylorův polynom funkce  $y = f(x) = e^x$  se středem  $x_0 = 0$ .

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f^{(i)}(x) = e^x, \quad f^{(i)}(0) = 1 \text{ pro } i = 1, 2, 3, \dots$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$



# Limity neurčitých výrazů

Je-li  $f(x_0) = 0 = g(x_0)$  a  $f(x) \neq 0 \neq g(x)$  na ryzím okolí bodu  $x_0$ , pak

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)},$$

tedy  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\frac{1}{x}} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} \ln x}{\frac{1}{x}}$$



# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\frac{1}{x}} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} \ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\frac{1}{x}} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} \ln x}{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \frac{x+1}{x}}$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \frac{x+1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x}$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \frac{x+1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{x+1} + x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x^2 + x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

# Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

**Příklady:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \frac{x+1}{x}} = e$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{x+1} + x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x^2 + x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1 \end{aligned}$$

# Průběh funkce

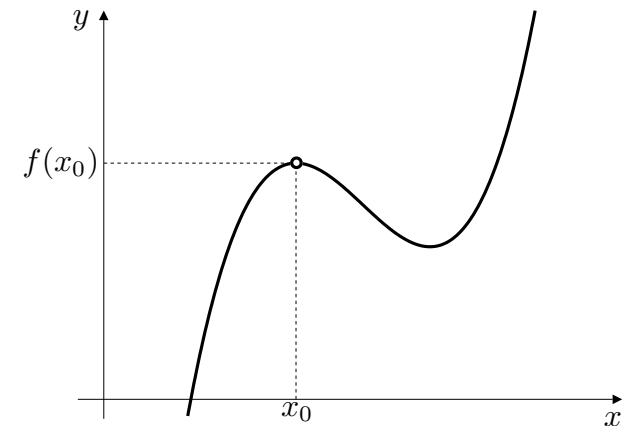
Extrémy funkcí:



# Průběh funkce

## Extrémy funkcí:

*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého lokálního maxima  $f(x_0)$ , pokud existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí nepřevýší hodnotu  $f(x_0)$ .*

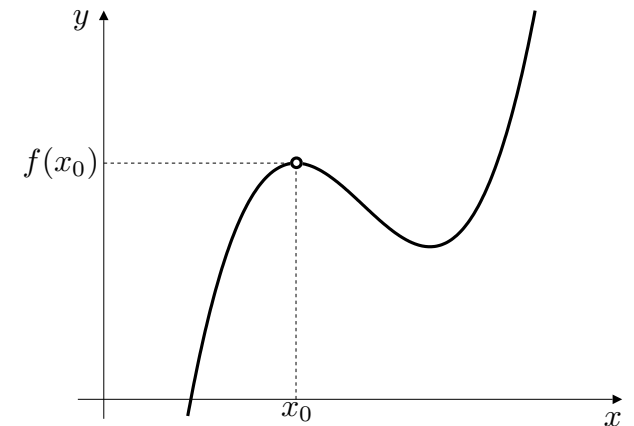


# Průběh funkce

## Extrémy funkcí:

*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého lokálního maxima  $f(x_0)$ , pokud existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí nepřevýší hodnotu  $f(x_0)$ .*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

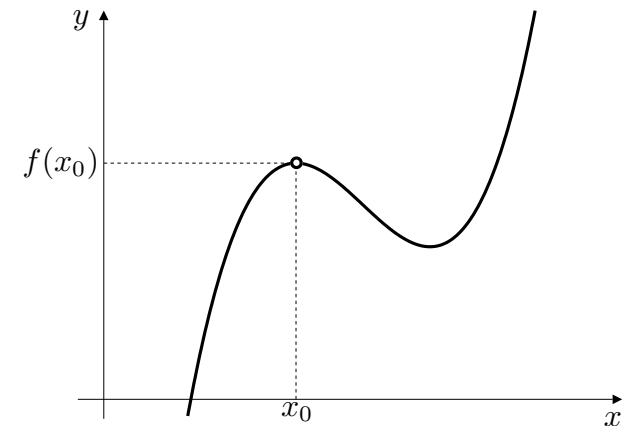


# Průběh funkce

## Extrémy funkcí:

*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého lokálního maxima  $f(x_0)$ , pokud existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí nepřevýší hodnotu  $f(x_0)$ .*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$



# Průběh funkce

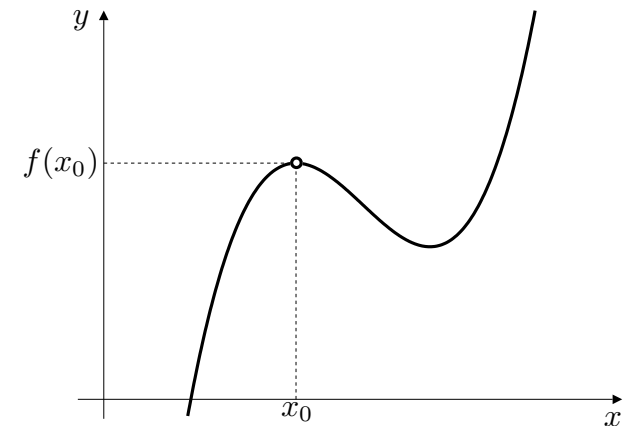
## Extrémy funkcí:

*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého lokálního maxima  $f(x_0)$ , pokud existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí nepřevýší hodnotu  $f(x_0)$ .*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého ostrého lokálního maxima  $f(x_0)$ , pokud existuje ryzí okolí bodu  $x_0$  takové, že každá funkční hodnota na tomto okolí je menší než  $f(x_0)$ .*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) > f(x)$$



# Průběh funkce

## Extrémy funkcí:

*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého lokálního maxima  $f(x_0)$ :*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

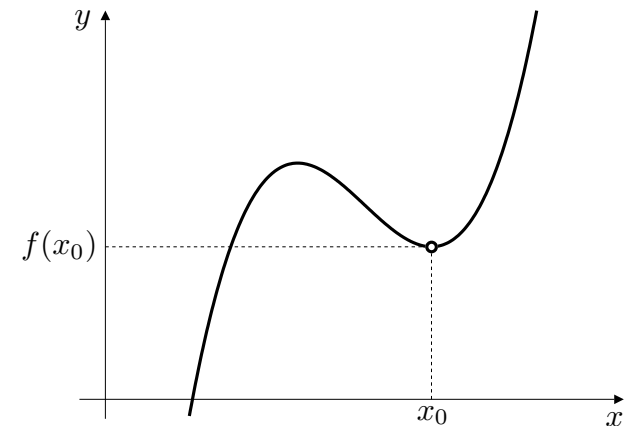
*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého ostrého lokálního maxima  $f(x_0)$ :*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) > f(x)$$

# Průběh funkce

**Extrémy funkcí:** Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého lokálního minima  $f(x_0)$ , pokud existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí neklesne pod hodnotu  $f(x_0)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$



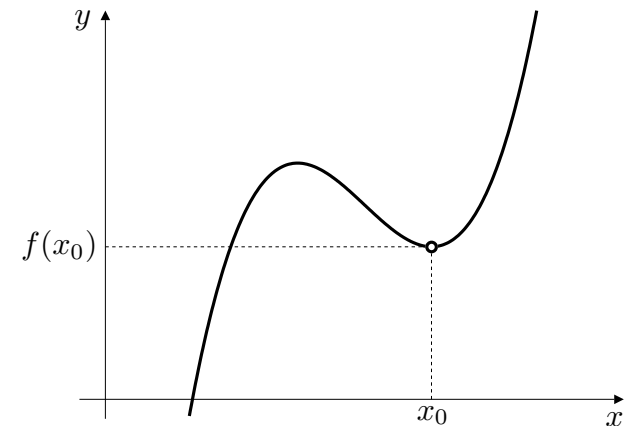
# Průběh funkce

**Extrémy funkcí:** Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého lokálního minima  $f(x_0)$ , pokud existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí neklesne pod hodnotu  $f(x_0)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého ostrého lokálního minima  $f(x_0)$ , pokud existuje ryzí okolí bodu  $x_0$  takové, že každá funkční hodnota na tomto okolí je větší než  $f(x_0)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) < f(x)$$



# Průběh funkce

## Extrémy funkcí:

*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého lokálního maxima  $f(x_0)$ :*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého ostrého lokálního maxima  $f(x_0)$ :*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) > f(x)$$

*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého lokálního minima  $f(x_0)$ :*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

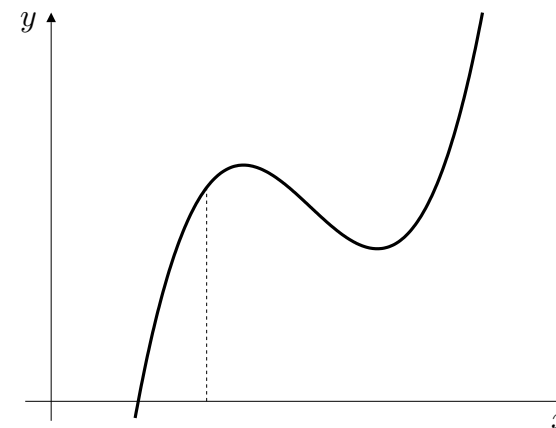
*Funkce  $f$  nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého ostrého lokálního minima  $f(x_0)$ :*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) < f(x)$$



# Průběh funkce

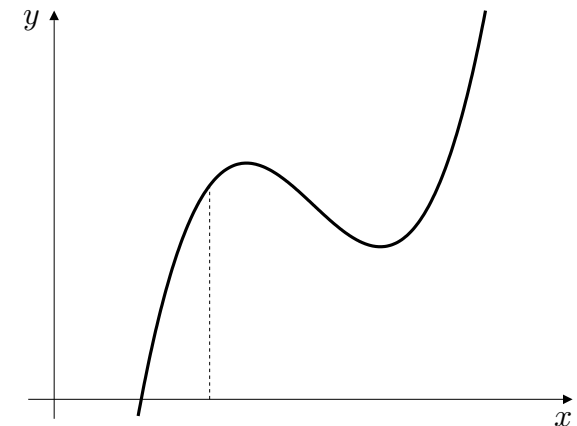
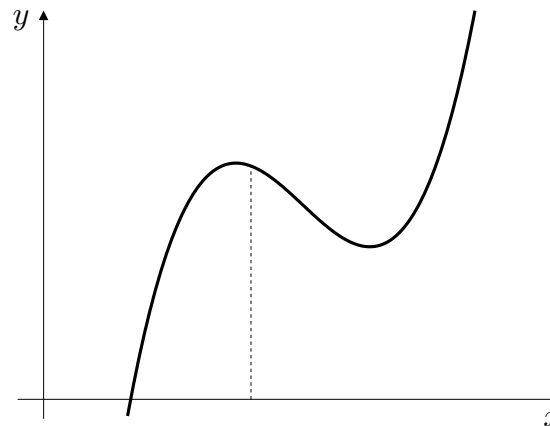
*Funkce  $f$  v bodě  $x$  roste:* existuje okolí bodu  $x$ , na kterém je funkce  $f$  rostoucí.



# Průběh funkce

*Funkce  $f$  v bodě  $x$  roste:* existuje okolí bodu  $x$ , na kterém je funkce  $f$  rostoucí.

*Funkce  $f$  v bodě  $x$  klesá:* existuje okolí bodu  $x$ , na kterém je funkce  $f$  klesající.



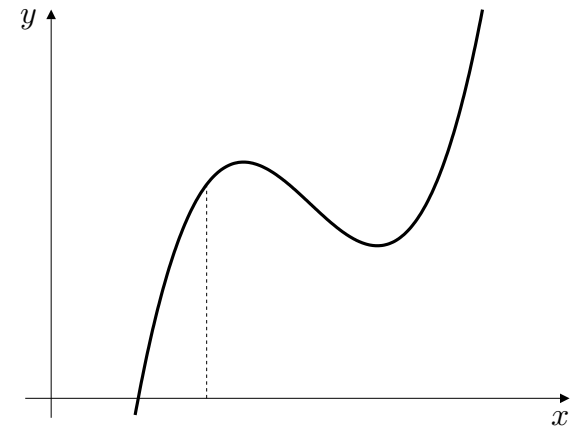
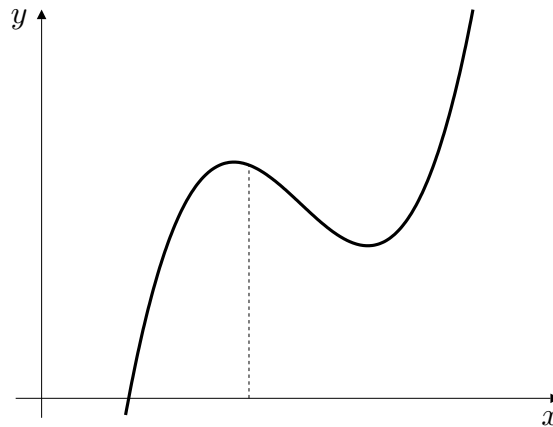
# Průběh funkce

*Funkce  $f$  v bodě  $x$  roste:* existuje okolí bodu  $x$ , na kterém je funkce  $f$  rostoucí.

*Funkce  $f$  v bodě  $x$  klesá:* existuje okolí bodu  $x$ , na kterém je funkce  $f$  klesající.

Tedy:  $f'(x) > 0 \Rightarrow f$  v bodě  $x$  roste

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$  v bodě  $x$  klesá



# Průběh funkce

Je-li  $\varepsilon$  „malé“, pak pro  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

kde  $R$  je „zanedbatelně malé“. Hodnoty  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  leží na tečně ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$ . Pokud  $f''(x_0) > 0$ , tak hodnoty  $f(x)$  leží nad touto tečnou, pokud  $f''(x_0) < 0$ , tak pod ní.

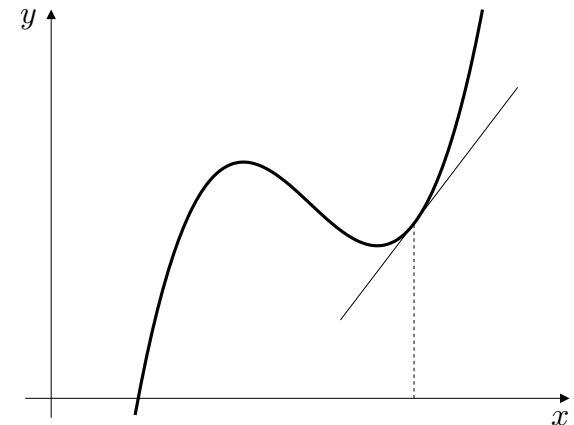
# Průběh funkce

Je-li  $\varepsilon$  „malé“, pak pro  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

kde  $R$  je „zanedbatelně malé“. Hodnoty  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  leží na tečně ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$ . Pokud  $f''(x_0) > 0$ , tak hodnoty  $f(x)$  leží nad touto tečnou, pokud  $f''(x_0) < 0$ , tak pod ní.

Tedy:  $f''(x) > 0 \Rightarrow f$  je v bodě  $x$  *konvexní* („graf leží nad tečnou“)



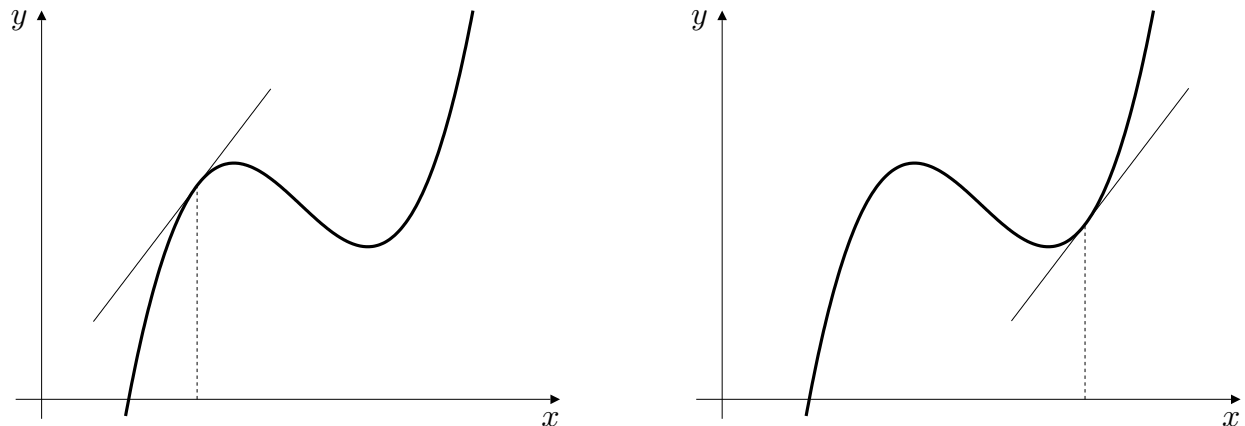
# Průběh funkce

Je-li  $\varepsilon$  „malé“, pak pro  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

kde  $R$  je „zanedbatelně malé“. Hodnoty  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  leží na tečně ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$ . Pokud  $f''(x_0) > 0$ , tak hodnoty  $f(x)$  leží nad touto tečnou, pokud  $f''(x_0) < 0$ , tak pod ní.

Tedy:  $f''(x) > 0 \Rightarrow f$  je v bodě  $x$  *konvexní* („graf leží nad tečnou“)  
 $f''(x) < 0 \Rightarrow f$  je v bodě  $x$  *konkávní* („graf leží pod tečnou“)



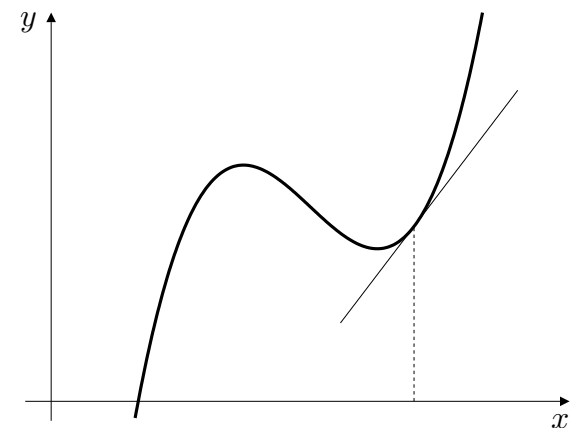
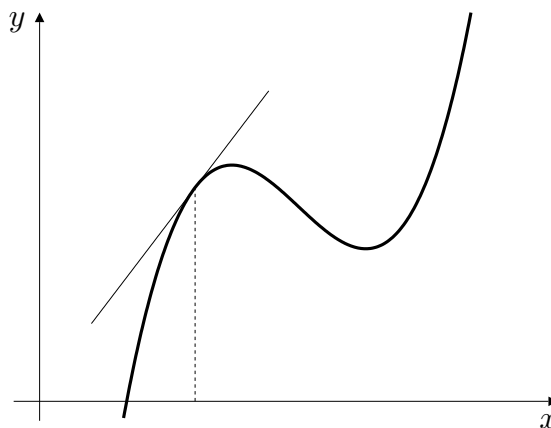
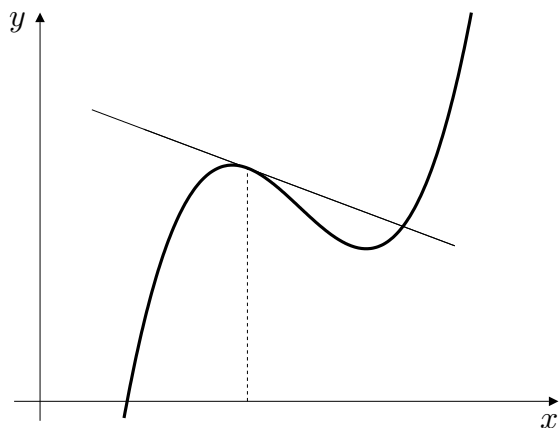
# Průběh funkce

Je-li  $\varepsilon$  „malé“, pak pro  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

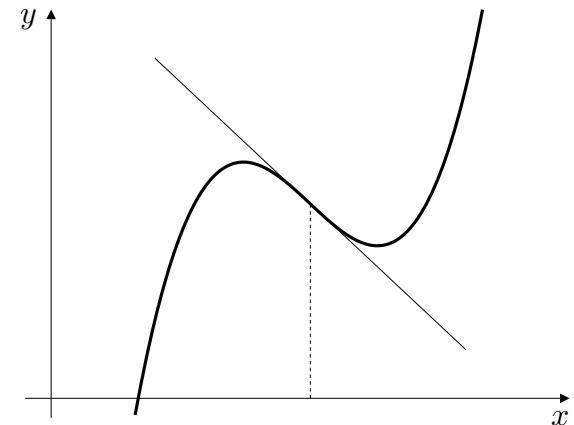
kde  $R$  je „zanedbatelně malé“. Hodnoty  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  leží na tečně ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$ . Pokud  $f''(x_0) > 0$ , tak hodnoty  $f(x)$  leží nad touto tečnou, pokud  $f''(x_0) < 0$ , tak pod ní.

Tedy:  $f''(x) > 0 \Rightarrow f$  je v bodě  $x$  *konvexní* („graf leží nad tečnou“)  
 $f''(x) < 0 \Rightarrow f$  je v bodě  $x$  *konkávní* („graf leží pod tečnou“)



# Průběh funkce

Bod  $x_0$  se nazývá *inflexní bod*, pokud v jeho levém okolí je funkce  $f$  konvexní (resp. konkávní) a v pravém okolí je konkávní (resp. konvexní); „graf funkce přechází v bodě  $(x_0, f(x_0))$  z jedné strany tečny na druhou“.





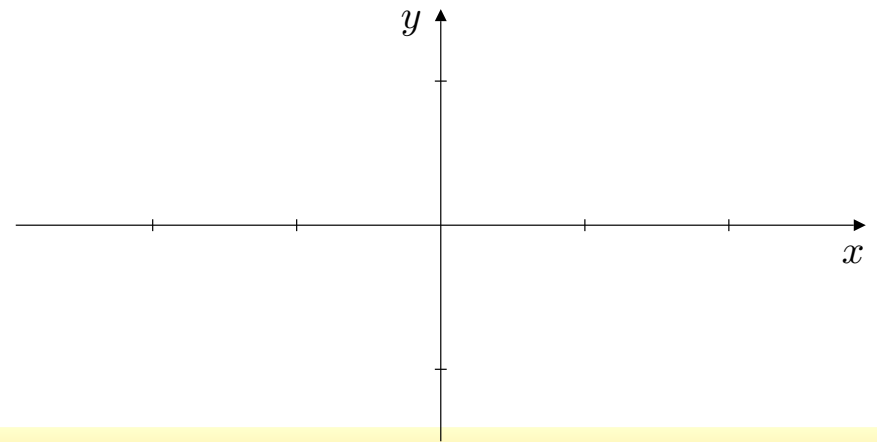
# Průběh funkce

## Vyšetřování průběhu funkce $f$ :

1. Určíme  $D(f)$ , sudost/lichost, periodičnost, hodnotu  $f(0)$  (průsečík grafu s osou  $y$ ).
2. Najdeme nulové body funkce  $f$  a intervaly, na nichž je funkce kladná a záporná.
3. Najdeme nulové body první derivace  $f'$  a body, v nichž  $f'$  není definována. Najdeme intervaly, na kterých je funkce  $f$  rostoucí a na kterých je klesající.
4. Najdeme body lokálních extrémů, tj. body, v nichž se funkce mění z rostoucí na klesající (lokální maxima), a body, v nichž se mění z klesající na rostoucí (lokální minima).
5. Najdeme nulové body druhé derivace  $f''$  a body, v nichž  $f''$  není definována. Najdeme intervaly, na kterých je funkce  $f$  konvexní a na kterých je konkávní.
6. Najdeme inflexní body s příslušnými funkčními hodnotami a hodnotou derivace (směrnicí tečny v inflexním bodě).
7. Určíme limity v nevlastních bodech.
8. Určíme chování funkce v okolí bodů, které „leží na kraji“  $D(f)$ .
9. Nakreslíme graf funkce  $f$

# Průběh funkce

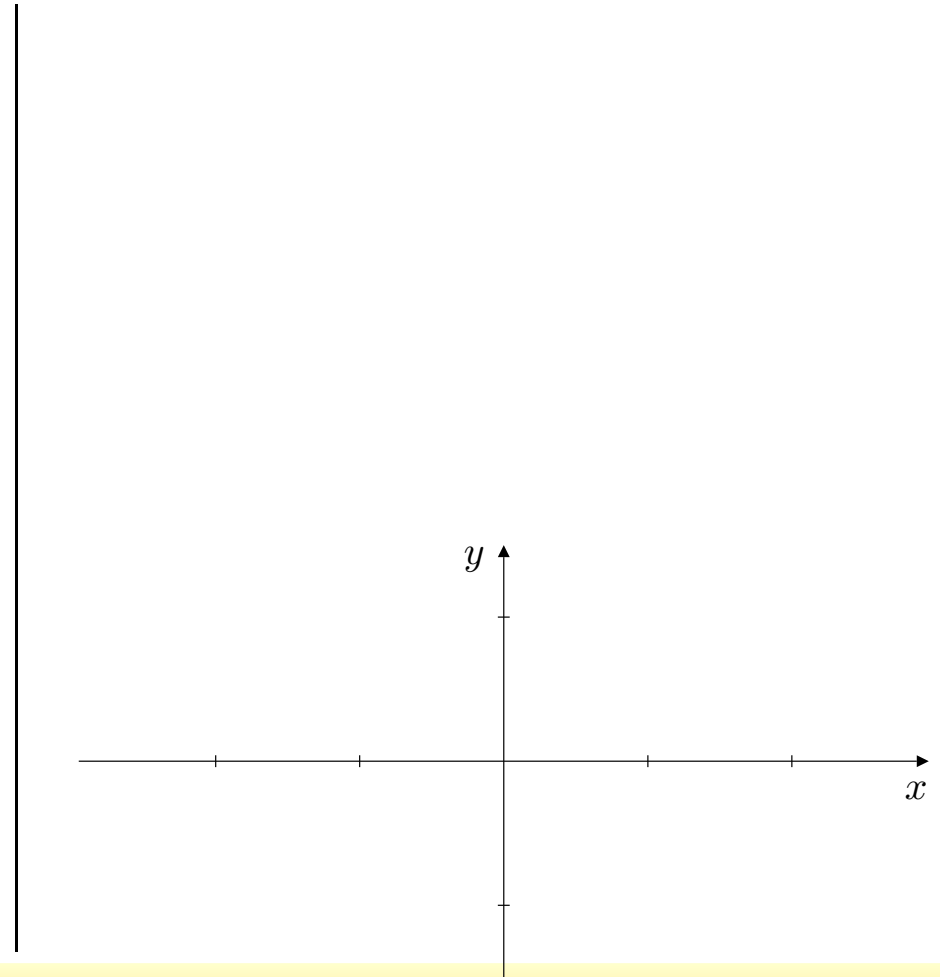
**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

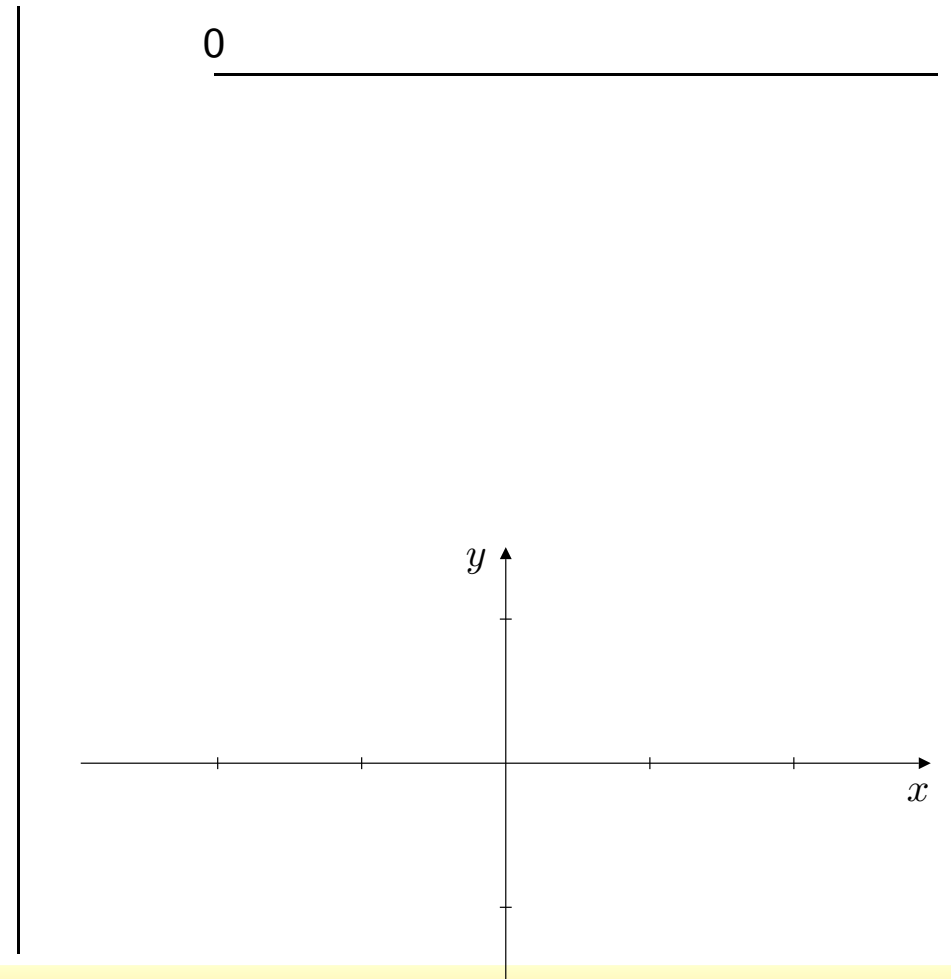
1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

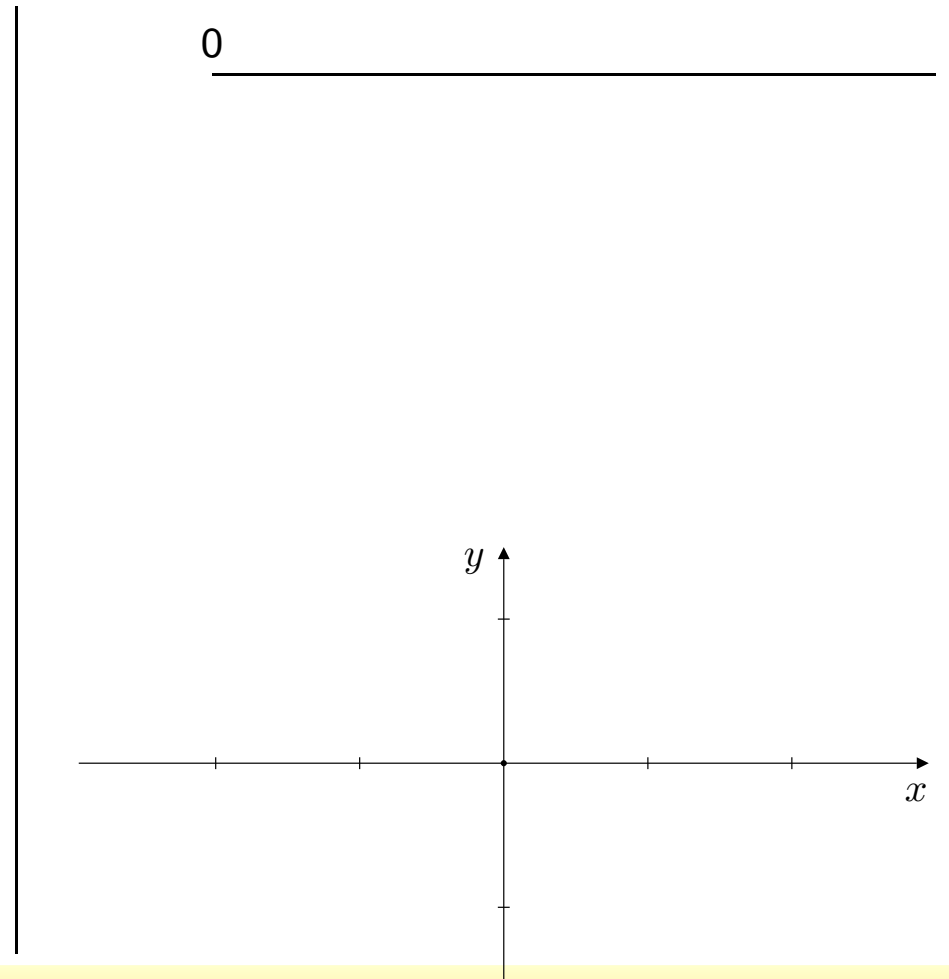
1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

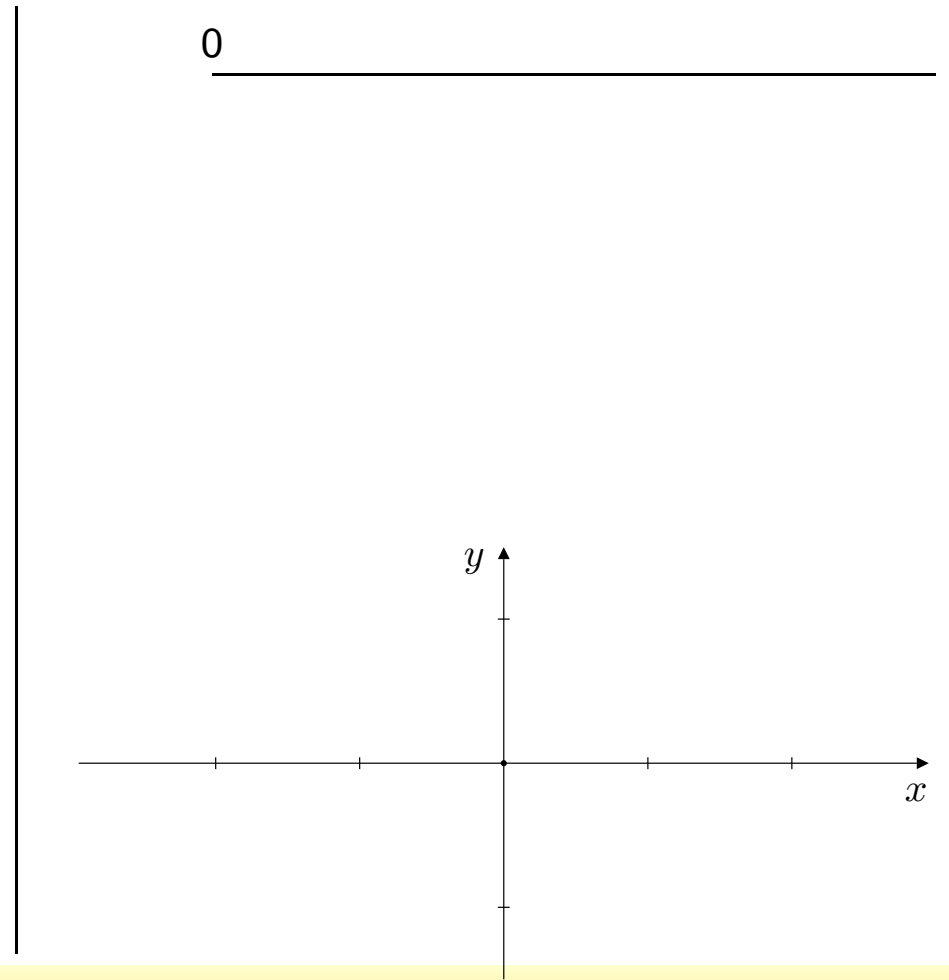
1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

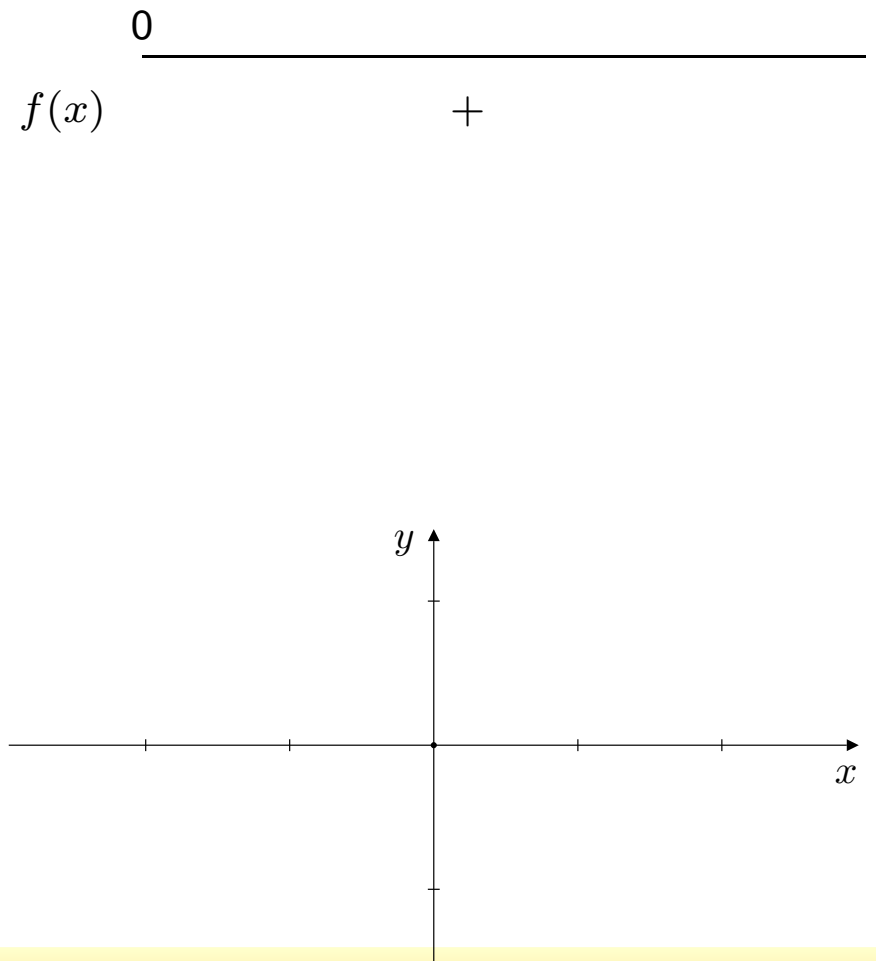
1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$
2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

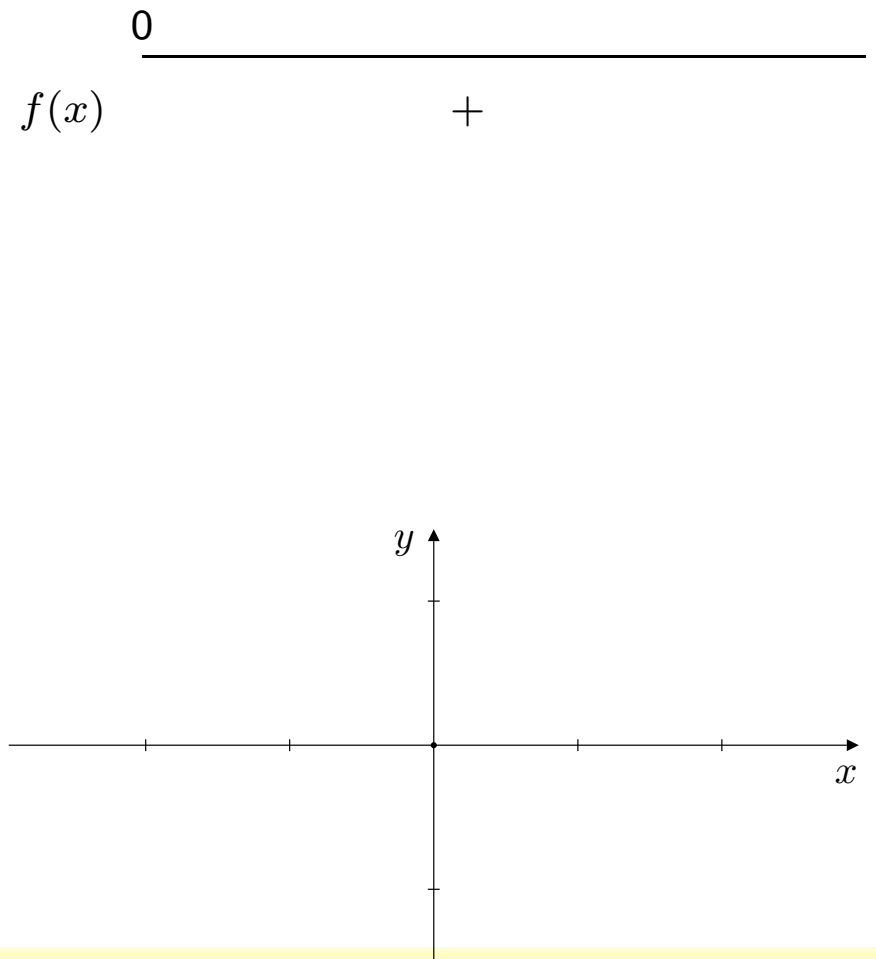
1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$
2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$
2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$
3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,





# Průběh funkce

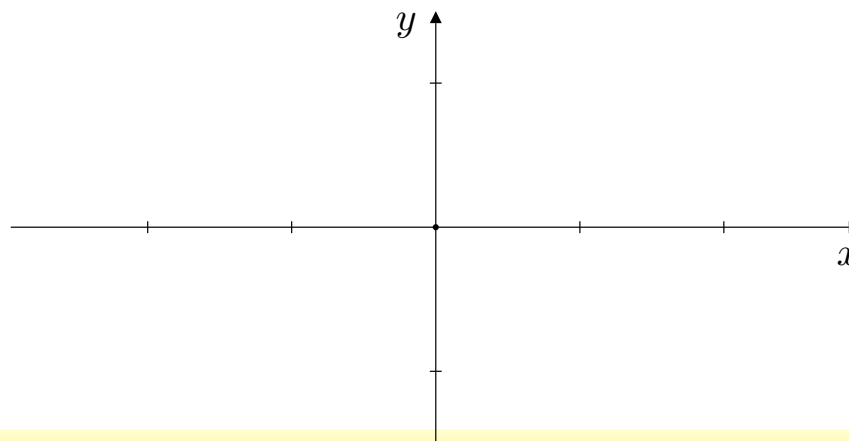
**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$

3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$

$$f(x) = \frac{0}{+}$$



# Průběh funkce

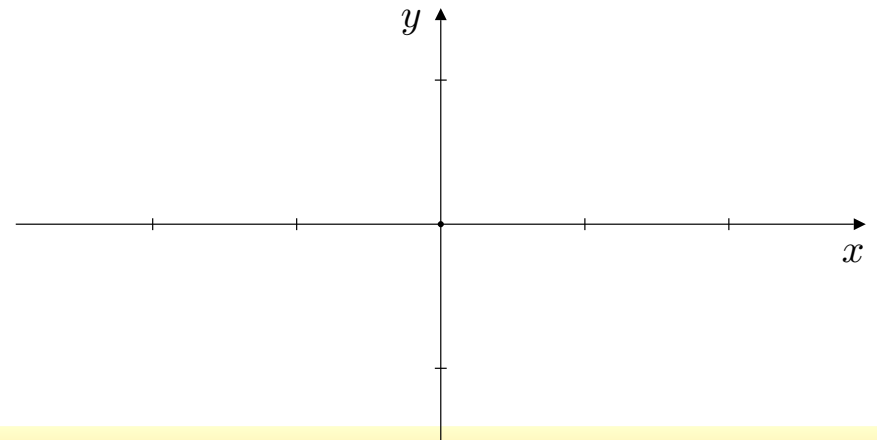
**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$

3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$

	0	1	
$f(x)$		+	
$f'(x)$	+		-



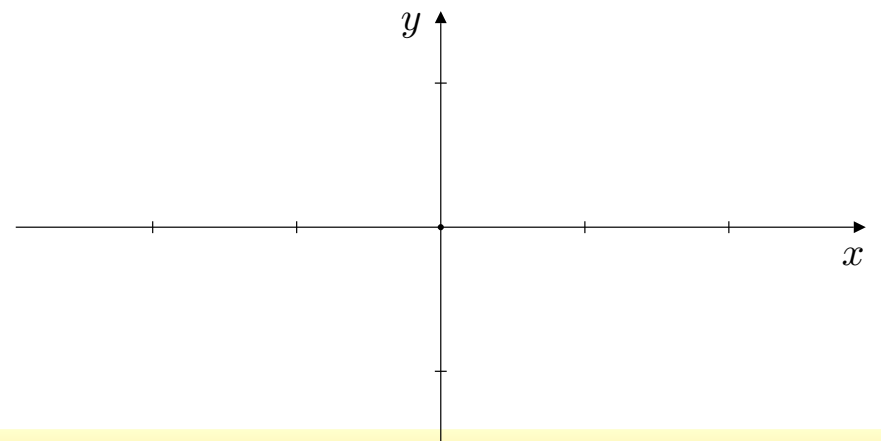
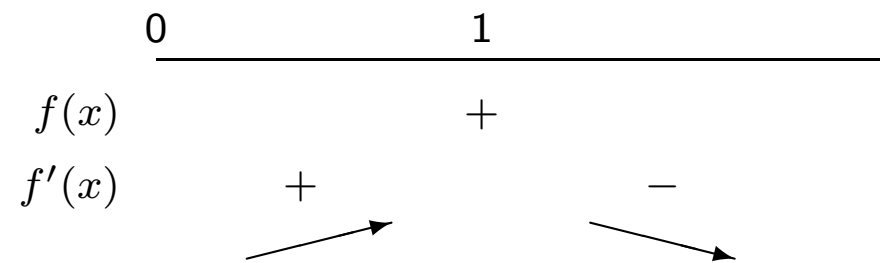
# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$

3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$



# Průběh funkce

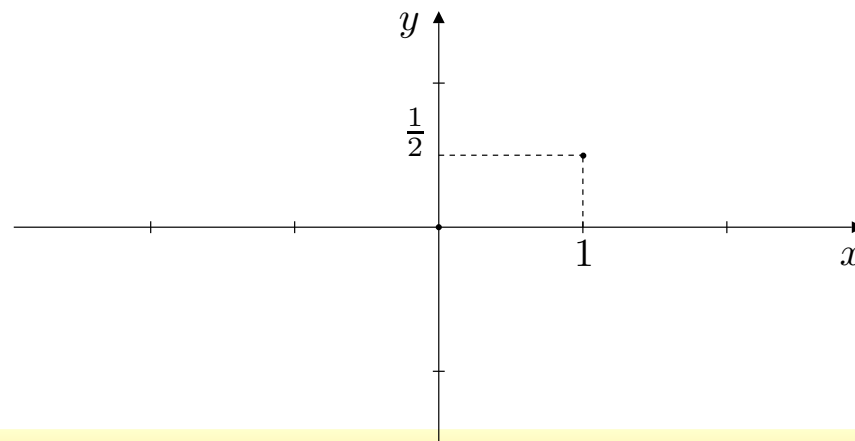
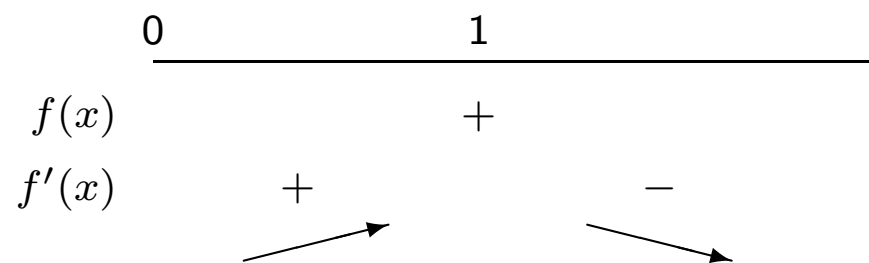
**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$

3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$

4.  $f(1) = \frac{1}{2}$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

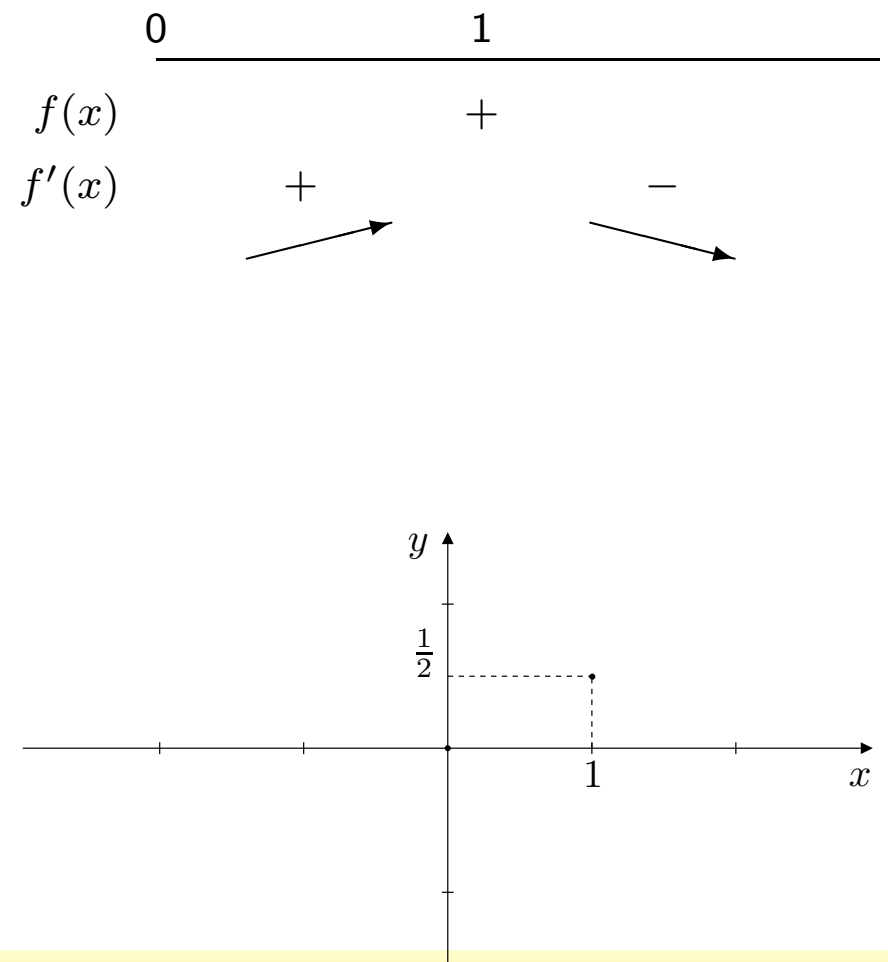
1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$

3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$

4.  $f(1) = \frac{1}{2}$

5.  $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$   
 $= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$

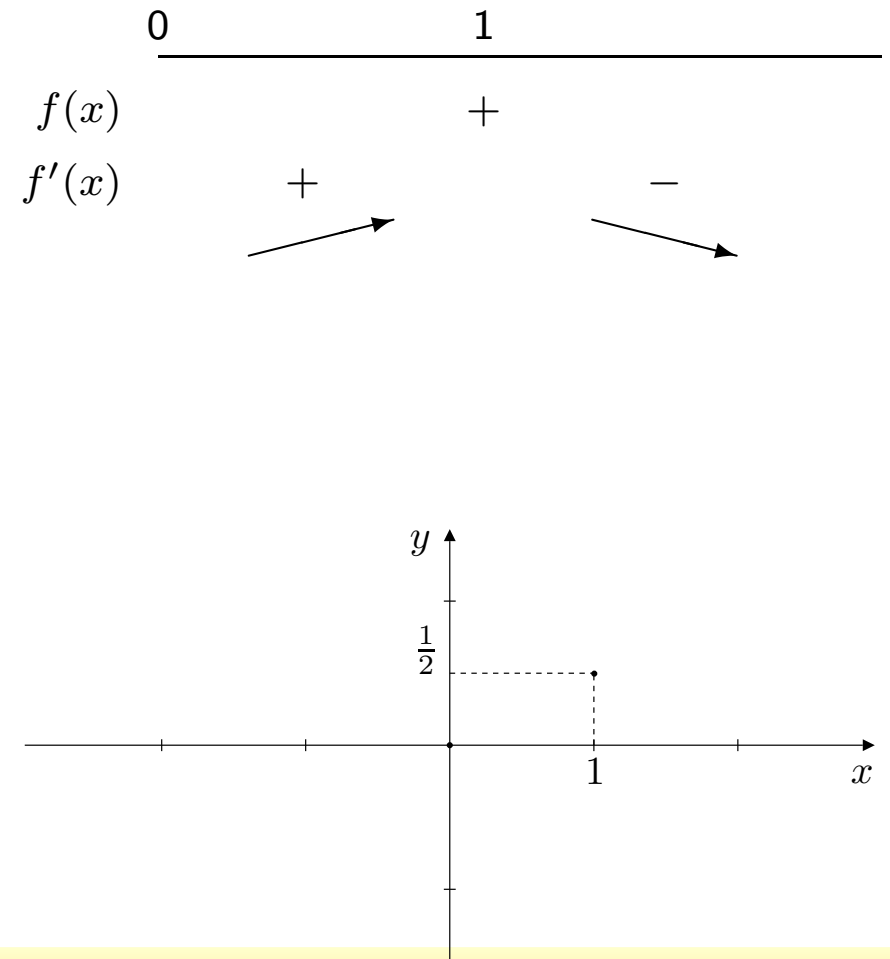
3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$

4.  $f(1) = \frac{1}{2}$

5.  $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$   
 $= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

$f''(x) > 0$  pro  $x > \sqrt{3}$ ,

$f''(x) < 0$  pro  $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1,7321$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$

3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$

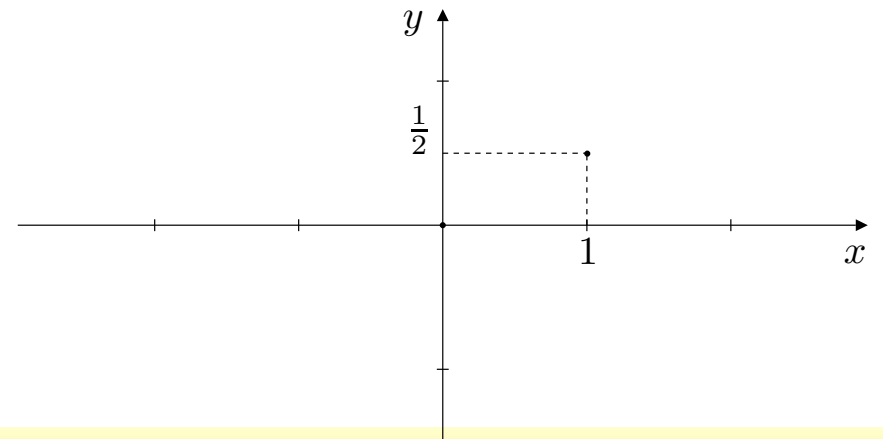
4.  $f(1) = \frac{1}{2}$

5.  $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$   
 $= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

$f''(x) > 0$  pro  $x > \sqrt{3}$ ,

$f''(x) < 0$  pro  $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1,7321$

	0	1	$\sqrt{3}$
$f(x)$		+	
$f'(x)$	+		-
$f''(x)$		-	+



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$

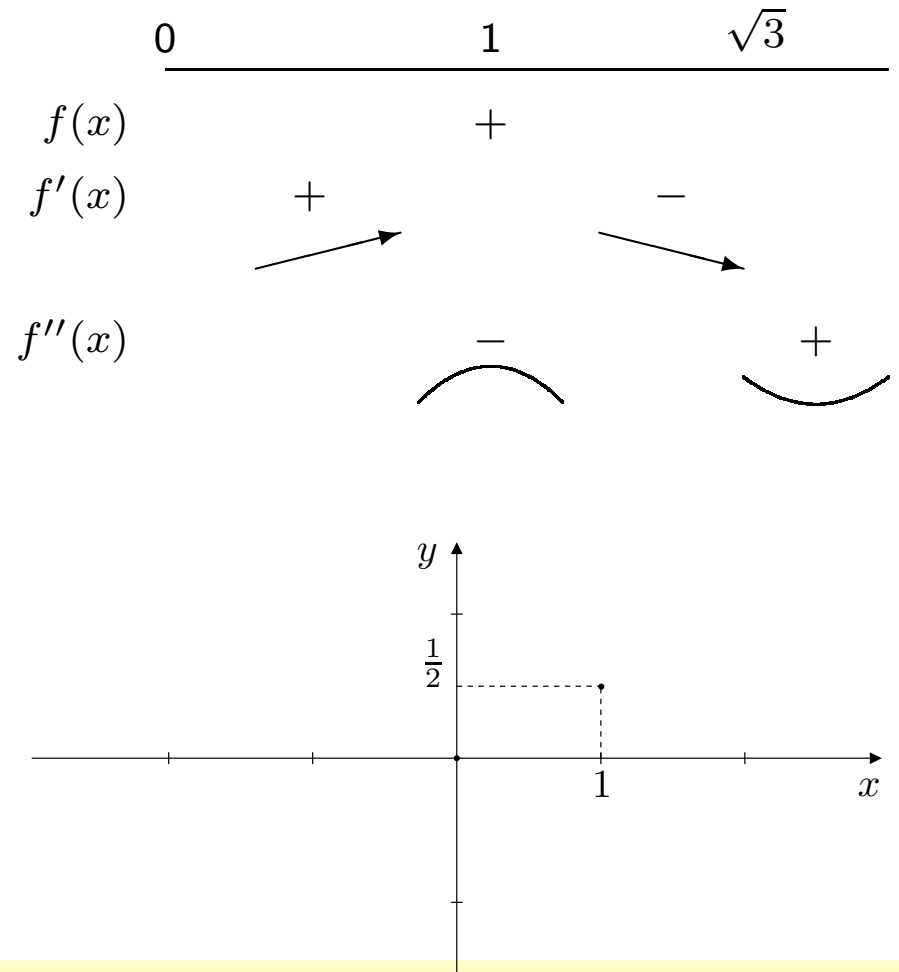
3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$

4.  $f(1) = \frac{1}{2}$

5.  $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$   
 $= \frac{2x(x^2 - 3)}{(1+x^2)^3}$

$f''(x) > 0$  pro  $x > \sqrt{3}$ ,

$f''(x) < 0$  pro  $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1,7321$





# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$

3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$

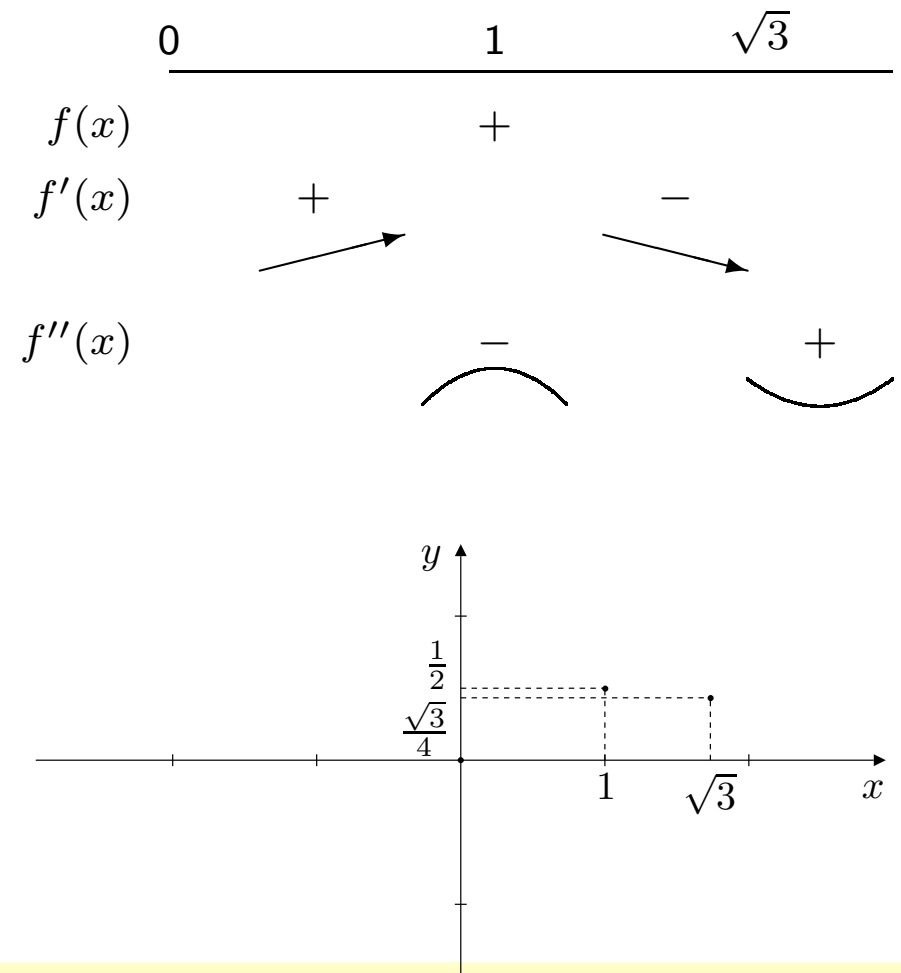
4.  $f(1) = \frac{1}{2}$

5.  $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$   
 $= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

$f''(x) > 0$  pro  $x > \sqrt{3}$ ,

$f''(x) < 0$  pro  $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1,7321$

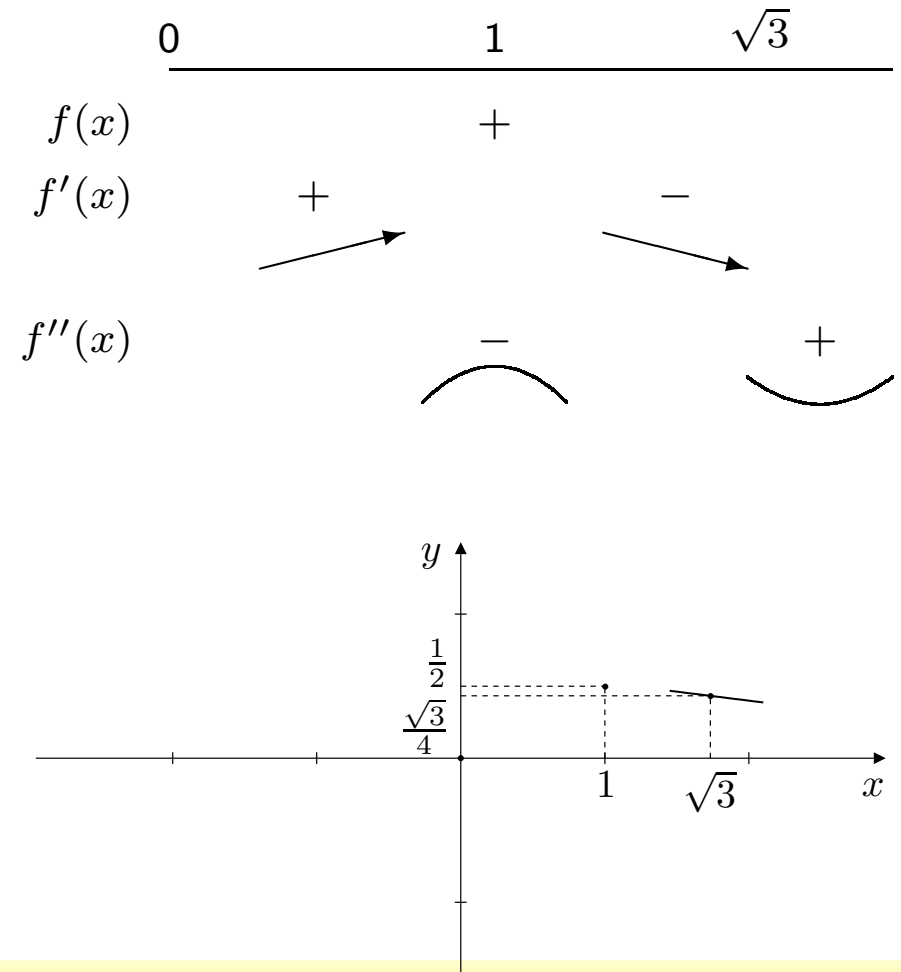
6.  $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0,4330$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

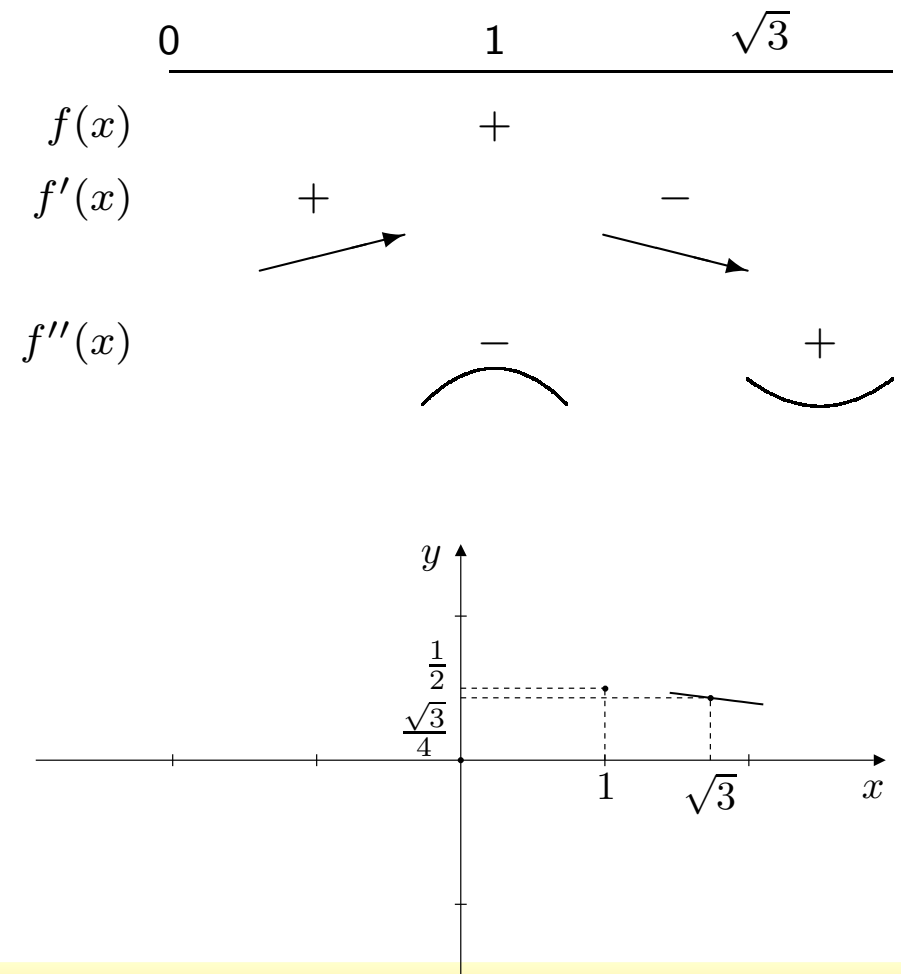
- $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$
- $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$
- $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$
- $f(1) = \frac{1}{2}$
- $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$   
 $= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$   
 $f''(x) > 0$  pro  $x > \sqrt{3}$ ,  
 $f''(x) < 0$  pro  $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1,7321$
- $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0,4330$ ,  $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0,125$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

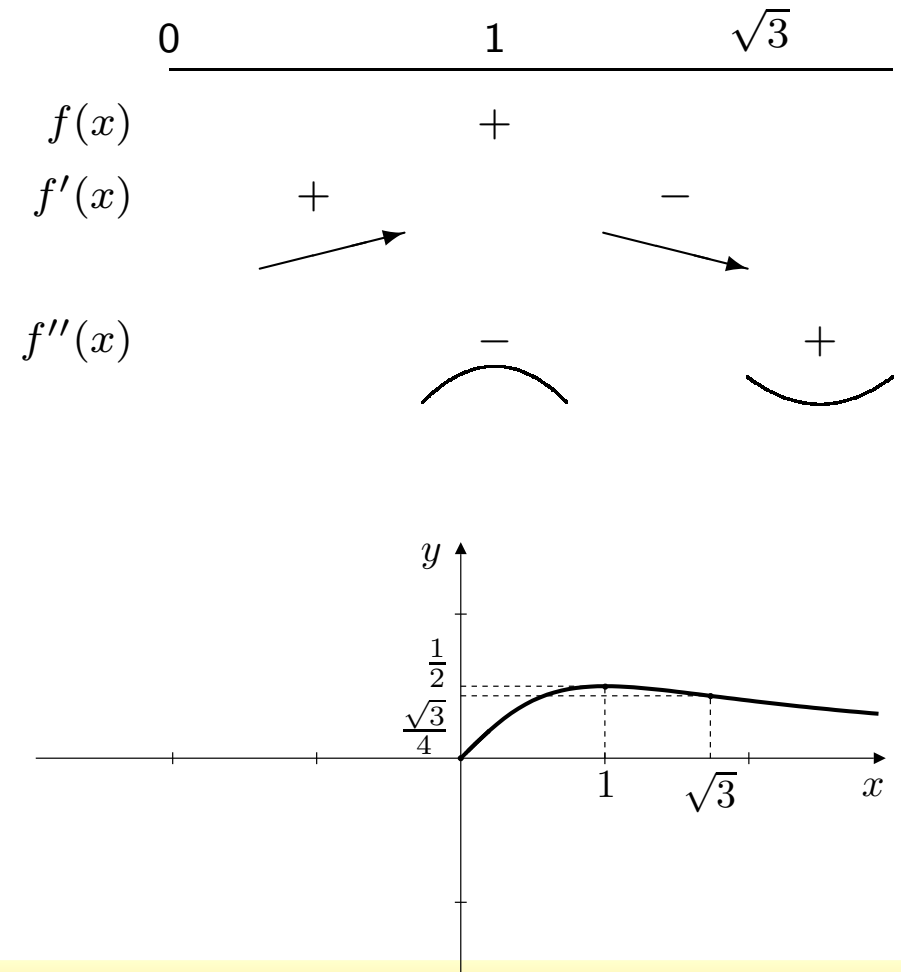
1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$
2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$
3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$
4.  $f(1) = \frac{1}{2}$
5.  $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$   
 $= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$   
 $f''(x) > 0$  pro  $x > \sqrt{3}$ ,  
 $f''(x) < 0$  pro  $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1,7321$
6.  $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0,4330$ ,  $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0,125$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

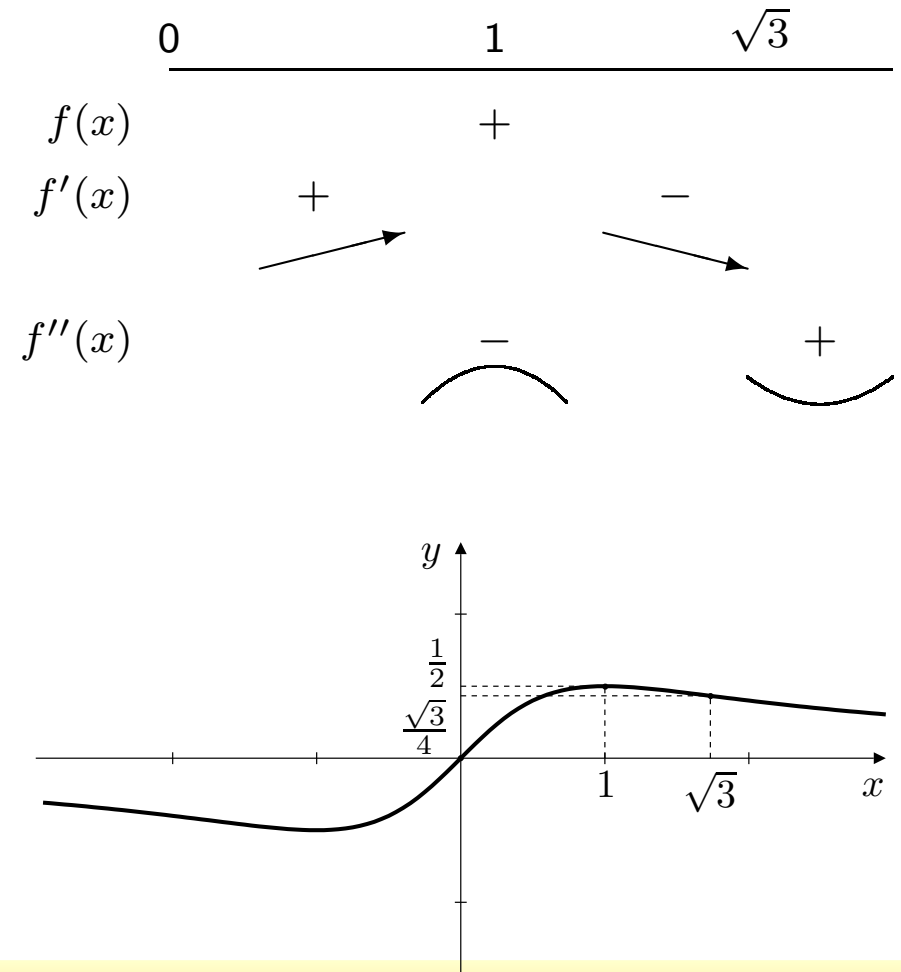
1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$
2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$
3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$
4.  $f(1) = \frac{1}{2}$
5.  $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$   
 $= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$   
 $f''(x) > 0$  pro  $x > \sqrt{3}$ ,  
 $f''(x) < 0$  pro  $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1,7321$
6.  $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0,4330$ ,  $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0,125$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , lichá – stačí vyšetřovat na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $f(0) = 0$
2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (0, \infty)$
3.  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  
 $f'(x) > 0$  pro  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  pro  $x > 1$
4.  $f(1) = \frac{1}{2}$
5.  $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$   
 $= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$   
 $f''(x) > 0$  pro  $x > \sqrt{3}$ ,  
 $f''(x) < 0$  pro  $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1,7321$
6.  $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0,4330$ ,  $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0,125$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$



# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{1}{6x^2(1-x)}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) < 0$  pro  $x > 1$

3.  $f'(x) = \frac{1}{6} \left( -\frac{2x(1-x) - x^2}{x^4(1-x)^2} \right) = \frac{3x-2}{6x^3(1-x)^2}$

$f'(x) > 0$  pro  $x < 0$ ,  $x \in (\frac{2}{3}, 1)$  a  $x > 1$ ,

$f'(x) < 0$  pro  $x \in (0, \frac{2}{3})$

4.  $f(\frac{2}{3}) = \frac{27}{24} = 1,125$

5.  $f''(x) = \frac{1}{6} \frac{3x^3(1-x)^2 - (3x-2)(3x^2(1-x)^2 - 2x^3(1-x))}{x^6(1-x)^4} =$   
 $= 2 \frac{(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{9}}{x^4(1-x)^3}$

$f''(x) > 0$  pro  $x < 0$  a  $x \in (0, 1)$ ,  $f''(x) < 0$  pro  $x > 1$

7.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{6x^2(1-x)} = 0$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x^2(1-x)} = \infty$ ,  $f(x) > 0$  nalevo od 1 a  $f(x) < 0$  napravo od 1

# Průběh funkce

**Příklady:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{1}{6x^2(1-x)}$ .

1.  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

2.  $f(x) > 0$  pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) < 0$  pro  $x > 1$

3.  $f'(x) = \frac{1}{6} \left( -\frac{2x(1-x) - x^2}{x^4(1-x)^2} \right) = \frac{3x-2}{6x^3(1-x)^2}$

$f'(x) > 0$  pro  $x < 0$ ,  $x \in (\frac{2}{3}, 1)$  a  $x > 1$ ,

$f'(x) < 0$  pro  $x \in (0, \frac{2}{3})$

4.  $f(\frac{2}{3}) = \frac{27}{24} = 1,125$

5.  $f''(x) = \frac{1}{6} \frac{3x^3(1-x)^2 - (3x-2)(3x^2(1-x)^2 - 2x^3(1-x))}{x^6(1-x)^4} =$   
 $= 2 \frac{(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{9}}{x^4(1-x)^3}$

$f''(x) > 0$  pro  $x < 0$  a  $x \in (0, 1)$ ,  $f''(x) < 0$  pro  $x > 1$

7.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{6x^2(1-x)} = 0$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x^2(1-x)} = \infty$ ,  $f(x) > 0$  nalevo od 1 a  $f(x) < 0$  napravo od 1

