1 Ukažte, že pro všechna x reálná platí $(-x)^2 = x^2$. Budete pak souhlasit i s tím, že $|x|^2 = x^2$?

2 Přesvědčte svého souseda, že druhá mocnina jakéhokoli reálného čísla je nezáporná. Tedy že $x^2 \geq 0$ pro jakékoli x reálné.

3 Dokažte, že platí vztah $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Zvládli byste to ilustrovat i obrázkem? (Zkuste to pomocí ploch: ab je plocha obdélníka o stranách a a b.)

4 A čemu se rovná $(a-b)^2$? Dovedete to odvodit z předchozího vztahu, aniž byste museli znova roznásobovat závorky?

5 Potřebujeme ještě další vztahy pro $(-a+b)^2$ a $(-a-b)^2$? Čemu se tyto výrazy rovnají?

6 Když je pro každé x reálné $x^2 \geq 0$, bude také platit $(x-1)^2 \geq 0$? A co takhle $x^2 + 1 \geq 2x$?

7 Ověřte si (třeba pomocí vzorce z úlohy 3), že se dá psát:

1. $x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3$; **2.** $x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$; **3.** $2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2$; **4.** $-x^2 + 3x + 1 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$.

Přepsání do takového tvaru se říká „doplnění na (úplný) čtverec“.

8 Sami zkuste do tohoto tvaru přepsat následující polynomy:

1. $x^2 - 6x + 8$; **2.** $-x^2 - 9$; **3.** $-2x^2 + 3x - 5$; **4.** Troufnete si převést i obecný kvadratický polynom $x^2 + bx + c$ (b, c jsou jakákoli reálná čísla)?

9 Jak vypadá graf funkce $ax^2 + bx + c$ v závislosti na a, b, c? (Pomůže Vám k tomu bod 4 předchozí úlohy.)

Odmocnina z reálného čísla x (kterou označíme $\sqrt{x}$) je takové $R \geq 0$, pro které platí $R^2 = x$.

10 Z definice, kterou jsem dal do rámečku, je jasné, že $\sqrt{x}$ je vždy nezáporná (pokud vůbec existuje). Dává ovšem smysl dělat odmocninu ze všech reálných čísel? Nebo to u některých smysl nedává? (Vizte úlohu 2.)

11 Je vidět, že odmocnina a druhá mocnina se „tak nějak“ ruší navzájem. Ale jak je to přesně?

1. Kdy dává výraz $\sqrt{x^2}$ smysl a čemu je pak roven? **2.** Kdy dává smysl výraz $(\sqrt{x})^2$ a čemu je roven?

12 Často funguje vztah $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$. Zkuste si ho dokázat. Myslíte, že se může někdy pokazit?

13 Zkuste vyřešit rovnici $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 1$.

14 Ubezpečte se, že rovnice $x^2 = 4$ má *dvě* řešení: $+2$ a -2.

15 Zkuste řešit následující rovnice:

1. $(x-1)^2 = 9$; **2.** $(x+2)^2 = 1$; **3.** $(x-4)^2 = 0$; **4.** $(x+1)^2 + 3 = 0$.

Na čem závisí, kolik má která taková rovnice řešení? (Z předchozí úlohy vidíte, že některé takové rovnice mohou mít dvě řešení. Mohou mít některé víc řešení? A míň?)

16 Zvládli byste doplněním na čtverec vyřešit libovolnou kvadratickou rovnici $x^2 + ax + b = 0$? Bude to snadné, pokud jste si v úloze 8 doplnili na čtverec obecný polynom. Kolik může mít taková rovnice reálných řešení? Na čem to závisí?

17 Ukažte, že $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Šel by k tomu taky nakreslit obrázek podobně jako v úloze 3?

18 Uměli byste s pomocí doplnění na čtverec ukázat, že je $x^2+4x+7 \geq 3$ a taky $-x^2+3x+1 \leq \frac{13}{4}$? (Pomůže Vám úloha 7.)

19 Může se stát, že by kvadratický polynom ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ nabýval všech reálných hodnot? Proč ano nebo proč ne?

20 Když chcete umocnit na druhou číslo končící pětkou, funguje tento trik: vynásobíte obě dvě okolní celé desítky mezi sebou a přičtete 25. Tak třeba: $55^2 = 50 \cdot 60 + 25 = 3025$ (můžete si to ověřit třeba na kalkulačce ◡̈). Zvládnete vysvětlit, proč to funguje? A uměli byste vyčíslit podobnou metodou i čtverce jiných čísel?

21 Ve starém Babyloně se násobilo pomocí tabulek čtverců. Představte si, že máte vypsané druhé mocniny přirozených čísel od 1 do 100. Jak se dají pomocí této tabulky (a trochy sčítání a odčítání) vynásobit jakákoli dvě dvouciferná přirozená čísla?

Zlomky $\frac{a}{b}$ jsou prostě jiný zápis dělení $a : b$. Proto platí, že když čitatel zvětším x-krát, hodnota celého zlomku se také zvýší x-krát. Naopak jestliže zvětším x-krát jmenovatel, hodnota celého zlomku se zmenší x-krát.

22 Na základě úvah z červeného kastlíku vysvětlete, proč násobení zlomků funguje takto: $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$. Stejně tak vysvětlete, proč dělení vyjde následovně: $\frac{a}{c} / \frac{b}{d} = \frac{ad}{bc}$.

23 Vysvětlete, proč můžeme ve zlomcích tzv. *krátit*: odstranit stejný nenulový činitel v čitateli i ve jmenovateli. Tedy např. $\frac{a \cdot b}{a \cdot (c+d)} = \frac{b}{c+d}$. Proč je důležité, aby zkrácený činitel nebyl nulový? Pak si zkuste upravit následující zlomky: **1.** $\frac{abc}{a(b+c)}$; **2.** $\frac{ab+ac}{bc+c^2}$; **3.** $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$; **4.** $\frac{a^2+2a+1}{a^2-1}$.

24 Stejně tak vysvětlete, proč můžeme tzv. *rozšířit* a násobit čitatel i jmenovatel stejným *nenulovým* činitelem, a proč je důležité, aby číslo, kterým rozšiřujeme, nebylo nulové.

25 Sčítat se dají jen zlomky *se stejným jmenovatelem*. Pak se prostě sečtou čitatele: např. $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} = \frac{3}{a}$. Často ale chceme sčítat i v případě, že se jmenovatelé liší — třeba bychom chtěli sečíst $\frac{1}{5} + \frac{2}{7}$. Jak to máme udělat? Využijte manévr *rozšíření* z předchozí úlohy na každý zlomek zvlášť tak, aby byly jmenovatelé stejní. Pak sečtěte jako normálně.

26 Sčítejte:

1. $\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{b^2}{a^2-b^2}$; **2.** $\frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c}$. **3.** $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$; **4.** $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$; **5.** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$; **6.** $\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x}$.

27 Uměli byste ukázat $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$? (Zkuste zlomek rozšířit tak, aby šel použít vztah pro $a^2 - b^2$. Tím se odmocniny ve jmenovateli zbavíte.)

28 Naložte podobně s těmito zlomky (odstraňte všechny odmocniny ze jmenovatelů):

1. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; **2.** $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$; **3.** $\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$; **4.** $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Pro tuhle proceduru existuje malebný český název: *usměrnění* zlomku.