

1 Vypočítejte plochu „oka“ uzavřeného mezi parabolami $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$.

2 Závaží o hmotnosti m kmitá na pružině o tuhosti k ve směru osy x . Kinetická energie je $\frac{1}{2}mv^2$, potenciální je $\frac{1}{2}kx^2$.

1. Vysvětlete, proč $v = \frac{dx}{dt}$. Pak ukažte, že platí $m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + kx^2 = 2E = \text{const}$.

2. Vyjádřete z rovnice $\frac{dx}{dt}$. Pak separujte proměnné a integrací zjistěte $x(t)$.

3. Co by se stalo, kdybychom přidali tíhovou sílu? Přidejte k potenciální energii ještě člen mgx .

3 Zjistěte plochu úseku paraboly $ax(b-x)$, který je nad osou x . Zapište výsledek pomocí jeho „základny“ a „výšky“.

4 Vezmu parabolou $y = a - \frac{ax^2}{b^2}$ a rotací kolem osy y vytvořím paraboloid. Jaký je objem tohoto paraboloidu (pro $0 < x < b$)?

5 Mám homogenní tyčku o délce L a hmotnosti m .

1. Kde je její těžiště? Nejdřív odpovězte intuitivně, pak ho spočítejte integrací.

2. Dám ji svisle do tíhového pole; jaká je její celková potenciální energie?

3. Zjistěte její moment setrvačnosti k ose kolmo procházející jedním koncem.

6 **Válka mravenců.** Kteréhosi dne v lese a černých mravenců potkalo b rezavých mravenců, svých nejzarputilejších nepřátel. Obě skupiny se na sebe vrhnou a začnou se navzájem ničit. Každý mravenec za čas dt zničí αdt svých nepřátel.

1. Doplňte správně do následujících rovnic to, jak se za čas dt změní počet obou skupin mravenců:

$da = \dots dt$; $db = \dots dt$.

2. Dělte obě rovnice mezi sebou. Separujte proměnné.

3. Integrací ukažte, že během celé bitvy musí platit $a^2 - b^2 = \text{const}$. Z toho ukažte, že pokud černých mravenců bylo více, přežije jich na konci bitvy $\sqrt{a^2 - b^2}$.

4. Řekněme, že obě skupiny bojují různě dobře: jeden černý mravenec za čas dt zničí αdt rezavých, jeden rezavý zas βdt černých. Jak se změní řešení úlohy?