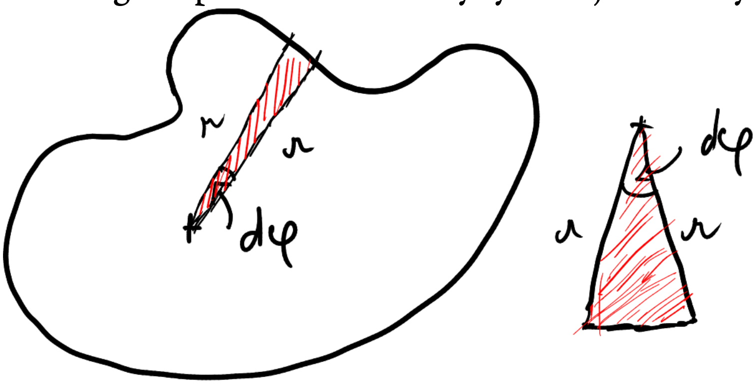
1 Nalezněte plochu následujících útvarů:

1. kusu paraboly $ax(b-x)$, který je nad osou x. Zapište výsledek pomocí jeho „základny“ a „výšky“;
2. elipsy o poloosách a a b;
3. bramboroidu ohraničeného shora grafem funkce $\frac{1}{1+x^2}$, ze stran přímkami $x = \pm 1$ a zdola osou $y = 0$.

2 Vypočtěte objemy a povrchy následujících těles:

1. katenoidu, který vznikne rotací křivky $r = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{z/a} + \mathrm{e}^{-z/a}\right)$ pro $-b < z < b$;
2. paraboloidu, který vznikne rotací paraboly $z = a - \frac{ar^2}{b^2}$ pro $0 < r < b$.

3 Co když chceme spočítat plochu omezenou nějakou křivkou zadanou v polárních souřadnicích (tedy vzdáleností od počátku r a úhlem φ)? Podívejte se na obrázek níže. Jaká je plocha červeně vybarveného trojúhelníčka? Integrací pak sečtěte všechny tyto trojúhelníčky a dostanete plochu.



4 Spočtěte plochu následujících útvarů:

1. Kardioidy zadané vztahem $r = a(1+\cos\varphi)$. **2.** Lemniskáty zadané vztahem $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

5 Mějme nějakou křivku danou parametricky $x = x(t)$, $y = y(t)$. Když posuneme parametr o dt, o kolik se změní x a y? Podle toho spočítejte délku kousku křivky ds, který při této změně vykreslíme. Délku křivky pak zapište jako integrál z ds.

6 Vypočtěte délku:

1. paraboly $y = x^2$ mezi body $x = -1$ a $x = +1$; **2.** řetězovky $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ mezi body $x = 0$ a $x = b$.

7 Co když by ta křivka byla zadaná v polárních souřadnicích? Tedy kdybychom místo $x(t)$ a $y(t)$ měli zadáno $r(t)$ a $\varphi(t)$? Přepište element délky ds tak, aby v něm vystupovalo pouze r a φ. (**Nápověda:** Mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí vztah $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.)

8 Vypočtěte délku:

1. logaritmické spirály $r = \mathrm{e}^{a\varphi}$ od jejího prostředku v $r = 0$ až do bodu s $r = 1$;
2. kardioidy $r = a(1+\cos\varphi)$ (celá křivka se opíše, když φ projde od 0 do 2π).