

I Zkuste spočítat následující goniometrické integrály:

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x \, dx$; 2. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$; 3. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \, dx$; 4. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$;

Není potřeba v tom hledat složitosti, všechny čtyři se dají vyřešit substitucí $u = \sin x$ nebo $u = \cos x$ a využitím goniometrické jedničky. V posledním příkladě zkuste rozšířit $\sin x$.

2 Vzpomeňte si, že platí $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Pak vypočtěte integrály:

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$; 2. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$; 3. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

3 Pokud jsou v integrandu jen sudé mocniny sinu a kosinu, hodí se použít substituci $\operatorname{tg} x = u$.

1. Vyjádřete $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ jen pomocí $\operatorname{tg} x$. 2. Ukažte, že při $\operatorname{tg} x = u$ platí $dx = \frac{du}{1+u^2}$.

Vyčístele: 3. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$; 4. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x}$; 5. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x}$ (zde $0 < b < a$).

4 Integrály s odmocninami se často dají pěkně vyřešit pomocí goniometrické substituce, protože

$\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ (a podobně i pro $\sin x$). Zkuste si to na těchto příkladech:

1. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$; 2. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

5 Integrujte per partes:

1. $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$; 2. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \, dx$; 3. $\int_0^1 \ln x \, dx$; 4. $\int_0^1 x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$; 5. $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$.

Pozor! V pátém bodě integrujete $e^{-x} \sin x$. Po každém per partes se podívejte, jestli náhodou ten integrál, který z per partes vyšel, není taky z $e^{-x} \sin x$, jinak se zacyklíte navěky.

6 Pomocí integrace per partes dokažte následující vztahy ($n \geq 2$ je přirozené číslo):

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$. Zapište explicitně výsledek $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ pro n sudé a liché.

2. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$. (**Nápověda:** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.)

7 Vyzkoušejte si ještě per partes na těchto integrálech (a pozor, musí se udělat hodněkrát!):

1. $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx$; 2. $\int_0^1 \frac{x^{2n} \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (n je zde přirozené číslo.)