Počítání

1 **1.** $\frac{1}{5}$; **2.** Dostaneme $\int_0^1 (1-u^2)u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$. **3.** Zde máme $\int_0^1 (1-u^2)^2\,\mathrm{d}u = \frac{8}{15}$.

4. Tady rozšiřme ještě sinem a dostaneme $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right)\mathrm{d}u = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$.

2 **1.** $\frac{\pi}{4}$; **2.** Dostaneme $\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,\mathrm{d}x$. Prostřední člen se integruje na nulu, pravý ještě zapíšeme jako $\frac{1+\cos 4x}{2}$. Kosinus se zas integruje na nulu a zůstane jen 3/2, která se integruje na $3\pi/4$. Výsledek je tedy $3\pi/16$. **3.** Buď můžeme zase využít ty vzorce, nebo napsat $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}\sin^2 2x\cdot 2$. Pak můžeme udělat substituci $2x = u$ a vyjde $\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 u\,\mathrm{d}u$. Integrál je roven dvojnásobku toho, co jsme našli v bodě 1, tj. $\pi/2$. Výsledek: $\pi/16$.

3 **1.** Máme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dělíme $\cos^2 x$, dostaneme $1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, tj. $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$. Proto musí být $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.

2. Diferencujme; dostaneme $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{d}u$, ale podle předchozího bodu je $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x = 1 + u^2$. Dělíme a získáme žádané.

3. Vložme $\mathrm{tg}\,x = u$ a přepišme podle našich vzorců z předchozího bodu. Obdržíme $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\cdot\frac{1}{\frac{a^2u^2}{1+u^2}+\frac{b^2}{1+u^2}} = \frac{1}{ab}\int_0^{\infty}\frac{a\,\mathrm{d}u/b}{1+\left(\frac{au}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{2ab}$.

4. Tohle vypadá hůř, než jaké to je. Zase dejme $\mathrm{tg}\,x = u$, obdržíme $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(1+u^2)\,\mathrm{d}u$ a je to integrace jednoduchého polynomu. Výsledek: $\frac{44}{9\sqrt{3}}$.

5. Nejdřív si uvědomíme, že díky sudosti kosinu stačí vzít dvojnásobek integrálu od nuly do π. Pak můžeme použít trik: přepíšeme $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ a dostaneme

$$2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(a-b)+2b\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Za závorku $(a-b)$ vložíme jedničku ve tvaru $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$ a po substituci $x/2 = u$ můžeme už využít vztah ze třetího bodu:

$$4\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{(a-b)\sin^2 u+(a+b)\cos^2 u} = 4\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

4 **1.** $\pi/2$. **2.** $\pi/2$ (vede to na $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$).

3. Vložme $x = \sin^2\varphi$. Pak $\mathrm{d}x = 2\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, meze jdou od 0 do $\pi/2$. Po dosazení vidíme, že se všechno pomlátí, zůstane jen dvojka a naintegruje se π.

5 **1.** 1; **2.** 2;

3. Tady je potřeba trik: rozdělíme to na $1\cdot\ln x$, jedničku budeme integrovat a logaritmus derivovat. Výsledek: $[x\ln x]_0^1 - 1$. Ale co je to v té závorce? Při $x = 1$ dostaneme nulu. Co ale při $x = 0$? To dostaneme $0\cdot\infty$, takže musíme použít l'Hospitala. Pišme: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0$. Celá hranatá závorka zmizne a zůstane jen výsledek -1.

4. Tady je otázka, co máme integrovat a co derivovat. Normálně se x derivuje, ale arkustangentu integrovat pěkně neumíme. Tak to raději uděláme obráceně. Tím dostaneme $\left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$. Hranatá závorka dá $\pi/8$, pod integrálem do čitatele přidám a odečtu jedničku a zlomek se rozpadne na $1 - \frac{1}{1+x^2}$, což už se integruje snadno. Výsledek: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

5. Označme ten integrál I. Derivujme sinus a $\mathbf{e}^{-x}$ integrujme; dostaneme $I = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-x} \cos x\,dx$. Zas udělejme per partes, derivujme kosinus a $\mathbf{e}^{-x}$ integrujme; dostaneme $I = 1 - I$, z čehož už snadno vypočteme $I = \frac{1}{2}$.

6 Tady už jsou výsledky přímo v zadání úlohy.

7 **1.** $n!$; **2.** $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

Aplikace

1 **1.** $\frac{2}{3}\cdot$ (základna) $\cdot$ (výška); **2.** πab; **3.** $\frac{\pi}{2}$.

2 **1.** Tady máme $dV = \frac{\pi a^2}{4}(\mathbf{e}^{2z/a} + \mathbf{e}^{-2z/a} + 2)\,dz$. Integrujme podle z od $-b$ do b. Obdržíme $V = \frac{\pi a^3}{4}\left(\mathbf{e}^{2b/a} - \mathbf{e}^{-2b/a}\right) + \pi a^2 b$.

Pokud jde o povrch, musíme ještě spočítat $dr = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{z/a} - \mathbf{e}^{-z/a})\,dz$ a $\sqrt{dr^2 + dz^2} = \frac{\mathbf{e}^{z/a}+\mathbf{e}^{-z/a}}{2}\,dz$. Povrch pak dostaneme jako $S = 2\pi\int\limits_{-b}^{b} r\sqrt{dr^2 + dz^2}$. Po provedení substituce $\mathbf{e}^{z/a} = u$ se to redukuje na integraci polynomu, i když nepříjemnou. Výsledek: $\frac{\pi a^2}{6}\left[\mathbf{e}^{3b/a} - \mathbf{e}^{-3b/a} + 9(\mathbf{e}^{b/a} - \mathbf{e}^{-b/a})\right]$.

2. Při $r = 0$ máme $z = a$ a při $r = b$ máme $z = 0$. Proto budeme integrovat v z od 0 do a. Při výpočtu objemu hned můžeme vyjádřit $r^2 = \frac{b^2}{a}(a-z)$ a $V = \pi\frac{b^2}{a}\int\limits_0^a (a-z)\,dz = \frac{1}{2}\pi b^2 a$.

U povrchu diferencujme: $dz = -2ar\,dr/b^2$, takže $dz^2 + dr^2 = \left(1 + \frac{4a^2r^2}{b^4}\right)dr^2$. Proto dostaneme

$$S = 2\pi\int\limits_0^b r\sqrt{1 + \frac{4a^2}{b^4}r^2}\,dr.$$

Položíme-li $1+\frac{4a^2}{b^4}r^2 = u$, dostaneme integrál z $\sqrt{u}\,du$ a snadno získáme výsledek $\frac{\pi b}{6a^2}\left[(b^2 + 4a^2)^{3/2} - b^3\right]$.

3 $dS = \frac{1}{2}r^2\,d\varphi$.

4 **1.** Počítejme $\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} r^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = 3\pi a^2/2$.

2. Tady je problém: pokud je kosinus záporný, rovnici nemůže vyhovět žádné r! Takže křivka musí mít dvě „uši“: jedno pro $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ a druhé o π dál. Jedno ucho má tedy plochu $\int\limits_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = a^2/2$. Obě uši dohromady mají tedy plochu a^2.

5 Dostaneme $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

6 **1.** Zde je $dy = 2x\,dx$, takže $dx^2 + dy^2 = (1 + 4x^2)\,dx^2$ a $s = \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$. Tento mírně nepříjemný integrál je potřeba vyčíslit s pomocí hyperbolických funkcí. Výsledek: $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5})$.

2. Zase tu máme hyperbolické funkce. $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{ch}^2 \frac{x}{a}\,\mathrm{d}x^2$, takže délka je $a\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}$.

7 Protože $\mathrm{d}x = \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ a $\mathrm{d}y = \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, můžeme prostě oba diferenciály dát na druhou a sečíst. Výsledek: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2$.

8 **1.** Zde je $\mathrm{d}r = a\mathrm{e}^{a\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$, takže $\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 = \mathrm{e}^{2a\varphi}(1+a^2)\,\mathrm{d}\varphi^2$. Integrovat musíme od $\varphi = -\infty$ až do $\varphi = 0$. Výsledek: $\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}$.

2. $\mathrm{d}r = -a\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}s^2 = 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi^2$. Délka je tedy $2a\int\limits_0^{2\pi}|\sin\frac{\varphi}{2}|\,\mathrm{d}\varphi = 8a$.

Zákeřné úlohy

2 **1.** Víme, že platí vztah $s = v\cdot t$, takže za malinký čas $\mathrm{d}t$ urazí závaží dráhu $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$. Odtud $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Dosazením do zákona zachování energie získáme žádané.

2. Obdrží se $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{1}{m}(2E - kx^2)}$. Přerovnáme to na

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{kx^2}{2E}}} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}\,\mathrm{d}t.$$

Integrujme čas od 0 do t. Poloha v těchto dvou časech je obecně $x(0)$ a $x(t)$. Násobme ještě rovnici $\sqrt{k/2E}$ a obdržíme

$$\int\limits_{x(0)}^{x(t)} \frac{\sqrt{k/2E}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{k/2E}\,x\right)^2}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

V integrálu položíme $\sqrt{k/2E}\,x = u$ a tím ho zredukujeme na tabulkový integrál. Vyjde

$$\arcsin u\Big|_{x(0)}^{x(t)} = \arcsin x(t) - \arcsin x(0) = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Proto dostáváme výsledek $x(t) = \sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \arcsin x(0)\right)$.

3. Nestalo by se nic moc zvláštního, protože potenciální energii lze pak doplnit na čtverec: $kx^2 + mgx = k(x$-
Pak můžeme zavést novou proměnnou $\hat{x} = x + \frac{mg}{2k}$. Jelikož je $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\hat{x}$, bude také platit

$$m\left(\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + k\hat{x}^2 = 2E + \frac{m^2g^2}{4k} = \text{const.}$$

a je vidět, že v gravitačním poli se $\hat{x}$ chová úplně stejně, jako se chovalo x bez gravitačního pole, jen se změní energie. Ta však v našem finálním výrazu pro $x(t)$ vůbec nevystupuje, takže máme úplně stejné řešení

$$\hat{x}(t) = \sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \arcsin\hat{x}(0)\right) \quad\Longrightarrow\quad x = -\frac{mg}{2k} + \sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \arcsin\left[x(0) - \frac{mg}{2k}\right]\right).$$

Takže se to chová úplně stejně, jen rovnovážná poloha je vychýlená o $mg/2k$ dolů.

3 **1.** Je to vlastně tak: rozdělíme interval od 0 do 1 na n kousků a nad každým z nich nakreslíme obdélníček do výšky té funkce pod integrálem. V tomto případě platí, že k-tý obdélníček bude začínat v bodě $\frac{k-1}{n}$ a končit v $\frac{k}{n}$. Bude-li obdélníčků opravdu hodně (tj. $n \to \infty$), jsou jeho oba konce tak blízko u sebe, že je vlastně dost jedno, jestli výšku obdélníčku udělám podle levého kraje, pravého kraje či podle nějaké hodnoty uprostřed. Zvolme si třeba pravý kraj. Pak bude pro k-tý obdélníček platit $x = k/n$. Šířka všech obdélníčků je stejná: $\mathrm{d}x = 1/n$. Proto integrál můžeme skutečně zapsat jako součet ploch všech těchto obdélníčků při $n \to \infty$ a dostaneme žádané.

2. Každý zlomek $\frac{n}{n^2+k^2}$ přepíšu na $\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Opět máme $x = k/n$ a $\frac{1}{n} = \mathrm{d}x$ je šířka obdélníčku. Proto je limita rovna $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

3. Zas obdobně. Nejdřív napíšeme $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ jako $\exp \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n) - \ln n\right]$. To lze dále upravit na toto:

$$\exp \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n}\right).$$

Limita pod exponenciálou je tedy $\int\limits_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = -1$ a celkem dostáváme výsledek $1/\mathbf{e}$.

4

1. Podle 2. Newtonova zákona máme $F = ma$. Zrychlení je $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, takže máme (když pro časovou derivaci píšeme tečku)

$$m\dot{v} = \tfrac{1}{2}CS\rho v^2 - mg.$$

2. Při mezní rychlosti je $\dot{v} = 0$, tj. $\frac{1}{2}CS\rho w^2 = mg$. Z toho máme $w = \sqrt{2mg/CS\rho}$. Předchozí rovnici násobme $2/CS\rho$. Obdržíme $w^2\dot{v}/g = v^2 - w^2$ čili

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{v}{w}\right)^2 - 1.$$

(Mimochodem si všimněte, že obě strany jsou bezrozměrné. Takové zápisy rovnic jsou ve fysice často užitečné, protože bezrozměrné veličiny vyjadřují nějaké charakteristiky té úlohy, které se nemění při natahování rozměrů/časů/atd.)

3. Přerovnáme rovnici na $\dfrac{\mathrm{d}v/w}{\left(\frac{v}{w}\right)^2 - 1} = \dfrac{g}{w}\,\mathrm{d}t$ a můžeme integrovat obě strany od času 0 do času t. Vpravo bude prostě jen gt/w. Vlevo uděláme super-duper-trik: substituci $v/w = \mathrm{th}\,\psi$, kde „th“ je tangens hyperbolický: $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$. Pak dostaneme $\frac{\mathrm{d}v}{w} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\psi}\,\mathrm{d}\psi$, v čemž můžeme položit $1 = \mathrm{ch}^2\psi - \mathrm{sh}^2\psi$ a získat

$$\frac{\mathrm{d}v}{w} = (1 - \mathrm{th}^2\psi)\,\mathrm{d}\psi = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]\mathrm{d}\psi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v/w}{\left(\frac{v}{w}\right)^2 - 1} = -\mathrm{d}\psi.$$

Integrál je tím vyřízen, protože z něj zůstane jen $-\mathrm{d}\psi$ a zbude pouhé $\psi(0) - \psi(t) = gt/w$. To přepišme na $\psi(t) = \psi(0) - gt/w$ a vezměme tangentu hyperbolickou z obou stran. Tím se vlevo zas objeví v/w a máme výsledek

$$v(t) = w\,\mathrm{th}\left[\psi(0) - \frac{gt}{w}\right] = -w\,\mathrm{th}\left(\frac{gt}{w} - \psi(0)\right).$$

Zde platí, že $\mathrm{th}\,\psi(0) = v(0)/w$, takže musíme využít inversní funkci k tangentě hyperbolické, která je, věřte nevěřte, rovna $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Proto platí, že $\psi(0) = \ln\sqrt{\frac{w+v(0)}{w-v(0)}}$.

4. Musíme ještě jednou integrovat tu rychlost získanou v předchozím bodě. Jelikož $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$, bude se integrovat na $\ln\mathrm{ch}$. Výsledek:

$$y(t) = y(0) - \frac{w^2}{g}\ln\mathrm{ch}\left[\frac{gt}{w} - \ln\sqrt{\frac{w + v(0)}{w - v(0)}}\right].$$

$\boxed{5}$ Oba integrály jsou tabulkové a už bychom je měli dobře znát. $\frac{1}{1+t^2}$ rozvineme v geometrickou řadu takto:

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 - \dots$$

a integrací tohoto rozvoje podle t dostaneme

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Obdobně s arkussinem: máme binomický rozvoj

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} t^{2n}.$$

Zase integrujeme a obdržíme rozvoj

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots$$

$\boxed{6}$ Elipsa je dána vztahem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\epsilon)^2} = 1$. Z toho vyjádříme $y = \pm(1-\epsilon)\sqrt{a^2 - x^2}$. Při odmocnění jsme tu vybrali jen znamení „+“ s tím, že tato rovnost popisuje jen horní polovinu elipsy. Dále spočteme $\mathrm{d}y = (1-\epsilon)\frac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ a

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \frac{a^2 + (\epsilon^2 - 2\epsilon)x^2}{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x^2.$$

Chceme úplnou délku elipsy. Budeme-li integrovat ds od $-a$ do a, dostaneme jen horní půlku; musíme tedy vzít dvojnásobek:

$$s = 2\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - (2\epsilon - \epsilon^2)x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Položme $x = au$ a využijme sudosti integrandu: integrál přejde v

$$s = 4a\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1 - (2\epsilon - \epsilon^2)u^2}}{\sqrt{1 - u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

To je jeden z tzv. *eliptických integrálů*, který není možné zapsat pomocí elementárních funkcí. Pokud ale předpokládáme, že ϵ je velmi malé, můžeme horní odmocninu rozvinout takto:

$$\sqrt{1 - (2\epsilon - \epsilon^2)x^2} = \left[1 - (2\epsilon - \epsilon^2)u^2\right]^{1/2} = 1 - \frac{2\epsilon - \epsilon^2}{2}u^2 - \frac{(2\epsilon - \epsilon^2)^2}{4}u^4 + \cdots$$

Pišme to jen do ϵ^2:

$$1 - \frac{2\epsilon - \epsilon^2}{2}u^2 - \epsilon^2 u^4 + \cdots$$

A můžeme to vložit do integrálu a integrovat. Využijeme toho, že $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^1 \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{4}$ a konečně $\int_0^1 \frac{u^4\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{3\pi}{16}$ a obdržíme výsledek

$$s = 2\pi a - \pi a\epsilon - \frac{\pi}{4}a\epsilon^2 + \cdots = 2\pi a - \pi(a-b) - \frac{\pi(a-b)^2}{4a} - \cdots$$

$\boxed{7}$ **1.** **2.** Začneme druhým bodem. Je-li $x = 0$, integrál jde od nuly do nuly a zjevně se nenaintegruje nic, takže $\Phi(0) = 0$. Jestliže pak máme $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Phi(x) - \Phi(0)$, musí podle Newtonovy-Leibnizovy formule zřejmě být $\mathrm{d}\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, čímž získáváme žádanou derivaci.

3. Zřejmě platí

$$\int_0^{-x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left\| \begin{array}{rcl} t & = & -u \\ \mathrm{d}t & = & -\mathrm{d}u \end{array} \right\| = -\int_0^{x} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Integrál tedy při změně znamení x také sám změní znamení. A $2/\sqrt{\pi}$ je jen konstanta.

4. Použijme per partes:

$$\int_0^x \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \left\| \begin{array}{cc} \Phi(t) & \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2} \\ 1 & t \end{array} \right\| = x\Phi(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

V posledním integrálu můžeme položit $t^2 = u$, tj. $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ a integrál vyjde $1 - \mathrm{e}^{-x^2}$. Výsledek: $x\Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Můžete si ověřit, že když tuto funkci zderivujeme, dostaneme zase $\Phi(x)$.

$\boxed{8}$ **1.** $\mathrm{d}a = -\alpha b\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}b = -\alpha a\,\mathrm{d}t$.

2. Dostaneme $a\,\mathrm{d}a = b\,\mathrm{d}b$.

3. Násobme rovnici dvěma na $2a\,\mathrm{d}a = 2b\,\mathrm{d}b$, což je $\mathrm{d}(a^2) = \mathrm{d}(b^2)$. Proto $\mathrm{d}(a^2 - b^2) = 0$, a tak $a^2 - b^2 = \text{const.}$ Bylo-li $a > b$, bude na konci bitvy $b_{\text{konec}} = 0$ a máme

$$a^2 - b^2 = \text{const.} \qquad \Longrightarrow \qquad a^2_{\text{začátek}} - b^2_{\text{začátek}} = a^2_{\text{konec}} - b^2_{\text{konec}}.$$

Takže skutečně $a_{\text{konec}} = \sqrt{a^2_{\text{začátek}} - b^2_{\text{začátek}}}$.

4. Budeme mít $\mathrm{d}a = -\beta b\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}b = -\alpha a\,\mathrm{d}t$. Opět dělíme a po integraci dostaneme $\alpha a^2 - \beta b^2 = \text{const.}$ Z toho je vidět, že efekt přesily je daleko větší než efekt toho, kdo má lepší bojovníky: má-li nepřítel dvakrát víc bojovníků, naši bojovníci musí být *čtyřikrát* lepší než jejich, abychom tuto výhodu vyrovnali. Konkrétně: jsou-li naši bojovníci λ-krát lepší, je z toho jen taková výhoda, jako by nás bylo $\sqrt{\lambda}$-krát víc.

$\boxed{9}$ **1.** Jde o starou známou řadu pro arkustangentu, odvozenou mj. v úloze 5. Dále viz tam.

2. Potřebujeme integrovat $1 + x^2 - x^4 - x^6 + x^8 + x^{10} - x^{12} - x^{14}$ atd. Zřejmě bude dobře vytknout z každých dvou sousedních členů vše, co jde: tím dostaneme $(1+x^2) - (1+x^2)x^4 + (1+x^2)x^8$ atd. Máme tedy integrovat řadu $(1+x^2)(1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, a to od nuly do jedné. Součet řady bude

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^1 \frac{(1+\frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 + 2} = \int_0^1 \frac{(1+\frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{x})^2 + 2}.$$

Položme $x - \frac{1}{x} = u$; pak dostaneme $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. Jaká náhoda, že přesně to se válí v čitateli! Teď už rychle obdržíme výsledek:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}u/\sqrt{2}}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$