1 Řešte pomocí separace proměnných:

1. $y' = 1+y^2$ při $y(0) = 1$; **2.** $xy'+y-y^2 = 0$; **3.** $y\ln y + xy' = 0$ při $y(1) = \mathrm{e}$; **4.** $\mathrm{e}^{-y}(y'+1) = 1$; **5.** $(1+\mathrm{e}^x)y' + \mathrm{e}^x y = 0$ při $y(0) = 1$; **6.** $y' \operatorname{tg} x - y^2 = 1 - 2y$.

2 Budeme řešit rovnici $y' = (6x+2y+3)^2$. Na to se bude hodit substituce $z = 6x+2y+3$, kde $z(x)$ bude naše nová neznámá funkce.

1. Derivujte rovnost $z = 6x+2y+3$ a vyjádřete y' pomocí z'.

2. Dosaďte do rovnice za y' podle předchozího bodu a $6x+2y+3$ vpravo zaměňte za z.

3. Výslednou rovnici řešte. Ve výsledku zase zapište $z = 6x+2y+3$ a vyjádřete y.

3 Následující rovnice řešte tak, že v nich položíte $y = ux$.

1. $2xy' = x+y$; **2.** $(x^2 - xy)y' + y^2 = 0$ (tohle jste už počítali v úvodu); **3.** $xy' - y = y\ln\frac{y}{x}$.

4 Zkuste vyřešit následující rovnice tím, že v nich z obou stran uděláte úplnou derivaci. (Dívejte se přitom do bodu 1 z úvodu.)

1. $yy' = x$; **2.** $y'\sin x + y\cos x = \sin x$; **3.** $\mathrm{e}^{x^2}(y' + 2xy) = x^2$. **4.** $2yy' + \mathrm{e}^x(y'+y) = 0$.

5 Někdy nejde hned udělat z obou stran úplná derivace. Většinou se ale dá najít něco, čím můžeme celou rovnici vynásobit tak, aby to najednou šlo. Tomu, čím násobíme, se říká *integrační faktor*.

1. Jak v úvodu dopadla derivace $\mathrm{e}^x y$? Vyřešte pomocí toho rovnici $y' + y = x^3\mathrm{e}^{-x}$.

2. Jak dopadla derivace $\mathrm{e}^{x^2}y$? Řešte $y' + 2xy = x$.

3. Jak dopadla derivace $\mathrm{e}^{f(x)}y$? Napište obecný recepis na řešení rovnic typu $y' + a(x)y = b(x)$.

6 Zkuste řešit $y' = \frac{1}{x-y^2}$ tak, že budete x považovat za neznámou funkci y (normálně je to opačně).

7 Zapište následující soustavy v maticovém tvaru $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathcal{M}\boldsymbol{x}$:

1. $\begin{cases}\dot{x} = 2x+y,\\ \dot{y} = 4x-y.\end{cases}$; **2.** $\begin{cases}\dot{x} + x - 5y = 0,\\ \dot{y} - x - y = 0.\end{cases}$; **3.** $\begin{cases}\dot{x} = 2y - 3x,\\ \dot{y} = y - 2x.\end{cases}$; **4.** $\begin{cases}\dot{x} = x+y,\\ \dot{y} = 3y-2x.\end{cases}$.

8 Vyřešte aspoň jednu z předchozích soustav.

9 Někdy se kromě samotných neznámých $\boldsymbol{x}$ mohou v soustavě objevit i další členy, které závisí jen na čase t, takže vznikne soustava $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathcal{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}(t)$.

1. Řekněme, že nějak objevíme (třeba uhodneme) jedno nějaké konkrétní řešení $\boldsymbol{x}_0$ této soustavy. Ukažte, že pak $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ splňuje soustavu $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathcal{M}\boldsymbol{y}$, kde už ty časově závislé členy nejsou.

2. Z toho odvoďte, že obecné řešení takové soustavy je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_0$, kde $\boldsymbol{y}$ je obecné řešení soustavy $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathcal{M}\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{x}_0$ je nějaké jedno konkrétní řešení té původní soustavy.

10 Řešte následující soustavy: **1.** $\begin{cases}\dot{x} = -x+2y+1,\\ \dot{y} = -2x+3y.\end{cases}$ (hádejte čísla);

2. $\begin{cases}\dot{x} = 2x+y-t,\\ \dot{y} = -2x+2t.\end{cases}$ (hádejte $at+b$); **3.** $\begin{cases}\dot{x} = 2x-3y,\\ \dot{y} = x-2y+2\sin t.\end{cases}$ (hádejte $a\sin t + b\cos t$).

11 Zkuste nějak rozšířit postupy, které jsme si tu vybudovali, a vyřešit s nimi i tyto soustavy:

1. $\begin{cases}2\dot{x} + 3\dot{y} = 16x - y,\\ \dot{x} - 2\dot{y} = -6x+3y.\end{cases}$; **2.** $\begin{cases}5\ddot{x} = 7x - 3y,\\ 5\ddot{y} = -2x+8y.\end{cases}$; **3.** $\begin{cases}\ddot{x} + 4\dot{x} = -\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y,\\ \ddot{y} + 4\dot{y} = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y.\end{cases}$.

12 Řešte následující rovnice:

1. $y'' - 16y = 0$; **2.** $y'' + 7y' - 8y = 0$ při počátečních podmínkách $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$; **3.** $y''' + y'' - y' - y = 0$; **4.** $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$; **5.** $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$.

13 Řešte následující rovnice s pravou stranou:

1. $y'' - 2y' + y = 1$; **2.** $y'' - y = x^3$; **3.** $y'' - 2y' = 4x + 2\cos 2x$; **4.** $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 + 17\sin x$; **5.** $y'' + y = \mathrm{e}^x \cos x$.