1 **Chladnoucí čaj.** Uvařili jsme si čaj o teplotě T_0 a nechali jsme ho v místnosti, v níž je teplota T_1. Teplota čaje se bude snižovat úměrně rozdílu teplot. Předpokládejte, že místnost je tak velká, že se teplota v ní během chládnutí čaje vlastně vůbec nezmění. Napište, jak se bude v čase teplota čaje vyvíjet.

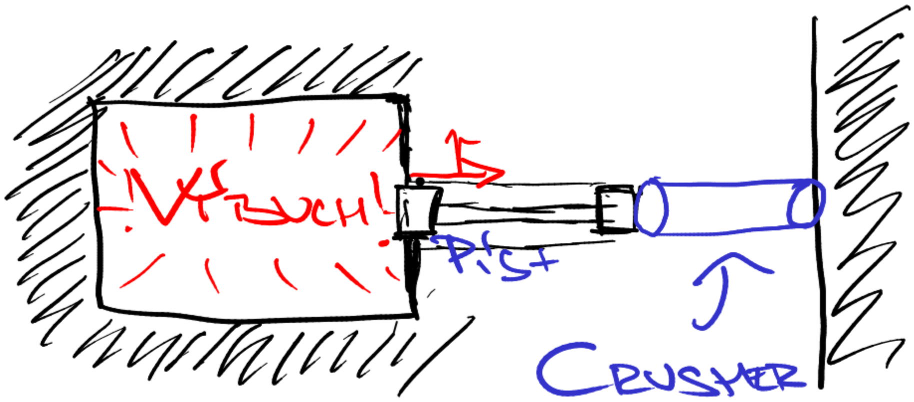
2 **Děravý válec.** Máte válec o poloměru R, v němž je nalita voda do výšky h_0. V jeho dně se ovšem udělala kruhová díra o poloměru r, takže voda teď teče pryč. Popište, jak se mění výška hladiny ve válci v závislosti na čase. Jak dlouho bude trvat, než bude válec prázdný? **Nápověda:** Voda vytéká rychlostí $v = \sqrt{2gh}$, kde h je výška vody nad otvorem.

3 **Koronavirus.** Mějme N lidí, z nichž v čase $t = 0$ je x_0 nakažených. Každý nakažený může nakazit další lidi, ovšem jen ty, kteří dosud nakaženi nejsou. Rychlost šíření nákazy je tedy úměrná $x(N-x)$, tj. součinu počtu nakažených a počtu nenakažených; konstantu úměrnosti označte třeba k. Zjistěte, jak počet nakažených závisí na čase.

4 **Vytápění.** Představte si, že máte chatu se třemi místnostmi: sklepem, obývákem a podkrovím. Venku je 0 stupňů Celsia a protože jste na chatě dlouho nebyli, je tato teplota i ve všech třech místnostech. V obýváku jsou naštěstí kamna, v nichž rozděláte oheň. V dokonale isolované místnosti by tato kamna zvyšovala teplotu o 20 stupňů za hodinu. Ovšem tady teče teplo jak do ostatních místností, tak ven z chaty. Podle Newtona se je časová změna teploty rovna $k(T'-T)$ kde T je teplota v místnosti a T' je teplota v místě, kam teplo uniká. k je pro přechod mezi vnitřkem a vnějškem chaty rovno $\frac{1}{4}$ hod^{-1} a pro přechody mezi místnostmi v chatě $\frac{1}{2}$ hod^{-1}. Určete teploty ve všech třech místnostech v závislosti na čase.

5 **Otrávená jezírka.** Tři stejná jezírka o objemu V jsou navzájem propojena stejnými kanály. Do prvního přitéká voda s průtokem Q (to je objem vody za jednotku času), ze třetího zase stejným průtokem odtéká. Nějaký zloduch do prvního jezírka vylil kyanid o objemu v. Určete množství jedu ve všech třech jezírkách v závislosti na čase, předpokládáte-li, že se v každém jezírku jed okamžitě dokonale rozmíchá a že se voda nikde nehromadí, tj. z každého jezírka odtéká tolik, kolik přitéká.

6 **Crusher.** Někdy je potřeba zjistit, jaký tlak vyvíjí plyny při nějakém výbuchu. Takový starý dobrý způsob, jak to změřit, spočívá v následujícím: výbuch se provede v nějaké pancéřované komoře s pístem, který těsně naléhá na měděný váleček, tak řečený *crusher*. Tento váleček opět z druhé strany těsně přiléhá k nějaké dokonale tvrdé zdi. Tlak výbuchu p pak zatlačí na píst, jenž zabírá ve stěně komory plochu S, a ten stlačí crusher o nějakou délku x; ovšem crusher tomu klade odpor silou $R = R_0 + kx$, kde R_0 a k jsou konstanty. Po výbuchu se crusher vyjme a změří se, o kolik se stlačil. Jak z toho spočítáte tlak p způsobený výbuchem? Tento tlak považujte za konstantní, změnu objemu komory při posunu pístu zanedbejte.



7 **Pružina.** Máme pružinu, která je v rovině jedním koncem přidělána k počátku a na druhém konci je přidělána částice. Částici natáhneme do bodu $(x_0, 0)$ a vyšleme ji rychlostí v_0 ve svislém směru. Jak se bude částice pohybovat?

8 **Pohyb v elektromagnetickém poli.** Částice s nábojem q letí v rovině xy rychlostí $v = (v_x, v_y)$. Intensita elektrického pole je E ve směru osy y a magnetická indukce je B ve směru osy z. Na částici působí pouze Lorenzova síla $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Zjistěte, jak se v tomto poli částice pohybuje.

9 **Soustava oscilátorů.** Mějme na přímce hmotné body o hmotnostech $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Každé dva body x_k a x_ℓ jsou spojeny pružinou tuhosti $K_{k\ell}$. (V případě, že body spojeny nejsou, lze pro ně prostě klást $K = 0$.) Zapište pohybové rovnice tohoto systému a zkuste něco říct o obecném řešení. Co když začneme cloumat každým bodem x_k nějakou silou $a_k \cos \omega t$ ($a_k = \text{const.}$)?

10 **Vlečení fošny (těžké!)** Člověk zanedbatelných rozměrů za sebou vleče fošnu o délce 1, jejíž jeden konec drží v rukách a druhý leží na zemi. Přitom člověk jde po zadané křivce. Jakou křivku opíše druhý konec fošny?

1. Napište pro tento problém obecně diferenciální rovnici.

2. Řešte pro případ vlečení fošny po přímce (berte do úvahy, že fošna na začátku nemusela být rovnoběžná s přímkou).

3. Zkuste to i pro případ kružnice.

11 **Taylorův rozvoj.** Ukažte, že funkce $y(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ je řešením diferenciální rovnice $(1-x^2)y' - xy = 1$. Zjistěte její Taylorův rozvoj tak, že si obecně napíšete $y = \sum c_n x^n$, dosadíte ho do rovnice (derivujte ho člen po členu) a porovnáte koeficienty u jednotlivých mocnin. To Vám dá rovnosti pro c_n, které můžete v obecnosti vyřešit.

12 Rovnice $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{k^2}{x^2})y = 0$ nemá řešení v elementárních funkcích. Její řešení jsou ale přesto tak užitečná, že se jim lidi rozhodli dát názvy a studovat je. Jmenují se *Besselovy funkce k-tého řádu* a značí se J_k a Y_k. Obecné řešení té rovnice je dáno jakoukoli lineární kombinací těchto dvou funkcí.

Se znalostí těchto faktů řešte soustavu
$$\begin{cases} u'' + \dfrac{1}{x}u' + u = \dfrac{1}{4x^2}(11u + 3v) \\ v'' + \dfrac{1}{x}v' + v = \dfrac{1}{4x^2}(9u + 17v) \end{cases}$$