

I Zapište následující soustavy v maticovém tvaru $\dot{x} = \mathcal{M}x$:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}; \quad 2. \begin{cases} \dot{x} + x - 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}; \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}; \quad 4. \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

2 Vyřešte aspoň jednu z předchozích soustav.

3 Někdy se kromě samotných neznámých x mohou v soustavě objevit i další členy, které závisí jen na čase t , takže vznikne soustava $\dot{x} = \mathcal{M}x + a(t)$.

1. Řekněme, že nějak objevíme (třeba uhadneme) jedno nějaké konkrétní řešení x_0 této soustavy. Ukažte, že pak $y = x - x_0$ splňuje soustavu $\dot{y} = \mathcal{M}y$, kde už ty časově závislé členy nejsou.

2. Z toho odvodte, že obecné řešení takové soustavy je $x = y + x_0$, kde y je obecné řešení soustavy $\dot{y} = \mathcal{M}y$ a x_0 je nějaké jedno konkrétní řešení té původní soustavy.

4 Řešte následující soustavy: **1.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + 1, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$ (hádejte čísla);

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - t, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$ (hádejte $at + b$); **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \sin t. \end{cases}$ (hádejte $a \sin t + b \cos t$).

5 Zkuste nějak rozšířit postupy, které jsme si tu vybudovali, a vyřešit s nimi i tyto soustavy:

$$1. \begin{cases} 2\dot{x} + 3\dot{y} = 16x - y, \\ \dot{x} - 2\dot{y} = -6x + 3y. \end{cases}; \quad 2. \begin{cases} 5\ddot{x} = 7x - 3y, \\ 5\ddot{y} = -2x + 8y. \end{cases}; \quad 3. \begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} = -\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ \ddot{y} + 4\dot{y} = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y. \end{cases}$$



6 Řešte následující rovnice:

1. $y'' - 16y = 0$; **2.** $y'' + 7y' - 8y = 0$ při počátečních podmínkách $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$;
3. $y''' + y'' - y' - y = 0$; **4.** $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$; **5.** $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$.

7 Řešte následující rovnice s pravou stranou:

1. $y'' - 2y' + y = 1$; **2.** $y'' - y = x^3$; **3.** $y'' - 2y' = 4x + 2 \cos 2x$; **4.** $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 + 17 \sin x$;
5. $y'' + y = e^x \cos x$.