Počty s goniometrickými funkcemi

1 Užitím součtových vzorců a goniometrické jedničky dokažte následující rovnosti:

1. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$; **2.** $\sin x(1 + \operatorname{tg} x) + \cos x(1 + \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$;

3. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$; **4.** $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\pi}{4} - x)}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\pi}{4} + x)} = \sin 2x$; **5.** $\cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x)$;

6. $4\sin a \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \sin 3a$; **7.** $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\cos 2x}$.

2 Využijte vzorce pro součet „$\sin \pm \sin$“ a „$\cos \pm \cos$“ a dokažte následující rovnosti:

1. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$; **2.** $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$;

3. $\dfrac{\cos b + \cos a}{\cos b - \cos a} = \operatorname{ctg}\frac{a+b}{2}\operatorname{ctg}\frac{a-b}{2}$; **4.** $\dfrac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}$.

3 Pomocí vzorců pro poloviční úhel dokažte následující:

1. $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x}$; **2.** $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4\cos^2\frac{a-b}{2}$;

3. $(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 4\sin^2\frac{a-b}{2}$; **4.** $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

4 Řešte rovnice:

1. $2\sin^2 x + 7\cos x = 5$; **2.** $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; **3.** $2\sin x = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$; **4.** $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$;
5. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; **6.** $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x + 1$.

Vlastnosti trojúhelníků

5 V této úloze zjistíme pár zajímavých vztahů pro trojúhelníky. $s = \frac{a+b+c}{2}$ je zde polovina obvodu. **1.** Z kosinové věty odvoďte, že platí $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. **2.** Pomocí vzorců pro poloviční úhel ukažte, že platí $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ a $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

3. Pro plochu platí $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Rozepište $\sin\alpha = \sin(2\cdot\frac{\alpha}{2})$ pomocí vztahu pro dvojitý úhel, dosaďte podle předchozího bodu a obdržíte *Heronův vzorec* $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

4. Vyjádřete součin $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ pomocí vztahů z bodu 2 a po použití Heronova vzorce odvoďte následující zbytečný, ale pěkný vztah pro plochu trojúhelníka: $S = \frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

6 **1.** Ukažte, že výšku na stranu c lze spočítat takto: $v_c = b\sin\alpha = a\sin\beta$. Napište podobné výrazy pro v_a a v_b.

2. Z rovnosti pro v_c odvoďte, že $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Z další podobné rovnosti odvoďte zbytek sinové věty.

3. Z rovnosti pro v_c odvoďte, že $a = \frac{v_c}{\sin\beta}$ a $b = \frac{v_c}{\sin\alpha}$. Díky tomu dokažte *tangentovou větu* $\frac{a-b}{a+b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

7 Pomocí kosinové věty odvoďte tento vztah pro délku těžnice na stranu c: $t_c^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2 - ac\cos\beta$. Pomocí další kosinové věty pro celý trojúhelník se pak zbavte členu s kosinem a zjistěte, že platí $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ atd.