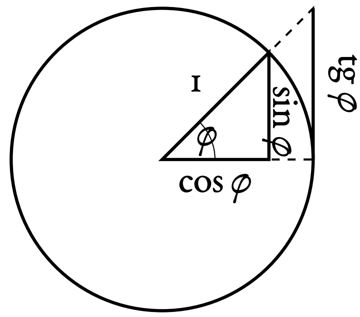
1 Funkce sin a cos definujeme obrázkem jednotkové kružnice. Úhel φ se počítá od kladné vodorovné poloosy proti směru hodin. Z obrázku vykoukejte následující:



1. Čemu se rovná $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi$? Záleží to nějak na φ?
2. Proč jsou funkce sin a cos periodické po 2π? Tedy: proč $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$ a $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$?
3. Nakreslete podobný obrázek pro úhly $3\pi/4$ a $-2\pi/3$. Jaká budou znaménka sinu a kosinu v těchto úhlech?
4. Co se stane se sinem, když úhel zvýšíme (nebo snížíme) o π? A co s kosinem?
5. Pro jaké úhly jsou tyto funkce definované? Jakých všech možných hodnot mohou nabývat, když do nich dosazujeme všechny možné úhly?

2 Definujeme též funkci *tangens*: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, a *kotangens*: $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Vysvětlete, proč se délka vyznačená v obrázku jako $\operatorname{tg}\varphi$ opravdu rovná tangentě úhlů φ podle této definice. (Zkuste použít podobnost trojúhelníků.)

3 Mají tangens a kotangens vždy smysl, nebo někdy nejsou definované? Jakých všech hodnot mohou nabývat? A jak je to s jejich periodicitou?

4 Jaké jsou hodnoty funkcí sin, cos, tg a ctg pro úhly 0, $\pi/2$, π a $3\pi/2$? Snadno to vykoukáte z obrázku s jednotkovou kružnicí.

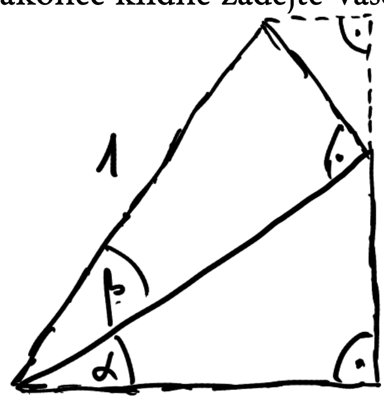
5 Nakreslete si čtverec o straně 1 a rozdělte ho jednou úhlopříčkou na dva trojúhelníky. Jaká je délka té úhlopříčky? Vypočtěte pomocí ní sin, cos, tg a ctg úhlu $\pi/4$. (Může se Vám hodit vzít jeden ten trojúhelník, trochu ho zmenšit, aby měl přeponu 1, a nějak ho napasovat do obrázku s kružnicí.)

6 Nakreslete si rovnostranný trojúhelník o straně 1 a jednou výškou ho rozdělte na dva trojúhelníky. Jaká je délka té výšky? Vypočtěte pomocí ní hodnoty funkcí sin, cos, tg a ctg pro úhly $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{3}$.

7 Přesvědčte se o tom, že $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Uměli byste vyjádřit i $\sin^2 x$ jen pomocí tangent x? A jak by to všechno vypadalo, kdybyste měli místo tangent použít kotangenty?

8 Vyšli jste ráno z domu pod asimutem 60° (to je úhel mezi směrem Vaší chůze a směrem k severu měřený *po* směru hodin, tedy „opačně“). Šli jste rovnou za nosem jeden kilometr; pak jste se otočili přímo směrem na sever a pokračovali půl kilometru. Nakonec jste se otočili o 135° doleva a šli jste zase přímým směrem dva kilometry. Jak daleko od domu budete? A pod jakým asimutem máte dům hledat? (Zkuste si nakreslit obrázek. Udělejte prosím výpočet na papíře, ale nakonec klidně zadejte Vaše výsledky do kalkulačky, ať máte číselnou představu.)

9 Pomocí obrázku vpravo zjistěte, jak se dá vyjádřit $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$ pouze pomocí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ a $\cos\beta$. Pokud nevíte, jak začít, zkuste nejdřív doplnit všechny úhly, pak postupně doplňujte strany (začněte v tom trojúhelníku, kde je strana o délce 1) a pak zjistěte, jaké délky na obrázku jsou rovny $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$.



10 Použijte předchozí vzorce na vyjádření $\sin 2x$ a $\cos 2x$.

11 Ze cvičení 1 víte, kolik je $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$, a z předchozího zase znáte $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$. Sečtením a odečtením zkuste vyjádřit $\cos^2\frac{x}{2}$ a $\sin^2\frac{x}{2}$ pomocí sinů a kosinů x. Dostanete takzvané *vzorce pro poloviční argument*. Zkuste taky spočítat $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ a $\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}$.

12 Když už znáte vztahy pro $\sin(x + y)$ a $\cos(x + y)$, dokázali byste z nich spočítat i $\operatorname{tg}(x + y)$? Vyjádřete ho jen pomocí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{tg} y$.

13 Nakonec si zkuste odvodit i vzorce pro součet sinů a kosinů. Napište si pod sebe $\sin(x + y)$ a $\sin(x - y)$, sečtěte a odečtěte. Pak udělejte totéž i s kosiny. Z výsledků byste měli už snadno vykoumat, čemu se rovnají součty $\sin a \pm \sin b$ a $\cos a \pm \cos b$ a rovněž součiny $\sin a \sin b$, $\cos a \cos b$, $\sin a \cos b$.