

1 Mějme výraz $e^{i\varphi} + e^{i\psi}$. Vytkněte z obou sčítanců $e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}$. Tím byste měli dojít k rovnosti

$$e^{i\varphi} + e^{i\psi} = 2e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Nyní oddělte reálnou část a zjistěte, čemu se rovná $\cos \varphi + \cos \psi$. Pak oddělte imaginární část a zjistěte, čemu se rovná $\sin \varphi + \sin \psi$.

2 Řekněme, že α, β, γ jsou úhly v rovinném trojúhelníku. Dokažte vztah

$$4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma.$$

Zkuste vlevo za kosiny a siny dosadit podle Eulerových vzorců (viz úlohu 16 v předchozím pracovním listě). Nezapomeňte, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, takže mj. platí $e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$, $e^{i(\alpha+\beta)} = -e^{-i\gamma}$ apod.

3 Roznásobením se přesvědčte, že $(2 + i)(3 + i) = 5 + 5i$. Vezmete-li argument obou stran a uvážíte-li, že při násobení se argumenty sčítají, dostanete $\arg(2 + i) + \arg(3 + i) = \arg(5 + 5i)$, tj. $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. Zvládli byste podobným způsobem ukázat, že platí $\frac{\pi}{4} = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}$?

4 Víte, jak se sčítá geometrická řada? Pro připomenutí: platí

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Zkuste teď dosadit $x = e^{i\varphi}$. Dokázali byste z toho dojít k následujícímu vztahu?

$$e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+\varphi)} + e^{i(\alpha+2\varphi)} + \dots + e^{i(\alpha+(n-1)\varphi)} = \exp \left[i \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \varphi \right) \right] \frac{\sin \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Vemte reálnou a imaginární část. Tím dokážete sečíst $\cos \alpha + \cos(\alpha + \varphi) + \dots + \cos[\alpha + (n-1)\varphi]$ a též $\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi) + \dots + \sin[\alpha + (n-1)\varphi]$.

5 Zatím jsme řešili jen siny a kosiny, ale můžeme se zabývat i tangentami. Můžeme totiž napsat $e^{i\varphi} = \cos \varphi \cdot (1 + i \operatorname{tg} \varphi)$, a tedy platí např.

$$e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} e^{i\psi} = \cos \varphi \cos \psi (1 + i \operatorname{tg} \varphi)(1 + i \operatorname{tg} \psi).$$

Uvědomte si, že platí $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{Im} e^{ix}}{\operatorname{Re} e^{ix}}$, a podělte reálnou a imaginární část výrazu výše. Odvoďte tím

$$\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi}.$$

Dovedete to zopakovat pro tři úhly a vyjádřit tím $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$? A jak by to bylo pro víc úhlů?

6 Na jednotkové kružnici jsou dva body $e^{i\varphi_1}$ a $e^{i\varphi_2}$. Jaký úhel je mezi nimi, když se díváme z jiného bodu $e^{i\psi}$? Ukažte, že tento úhel lze zapsat jako $\arg \frac{e^{i\varphi_2} - e^{i\psi}}{e^{i\varphi_1} - e^{i\psi}}$. Vytkněte tak, aby se ve zlomku udělaly siny podle Eulerova vzorce a vyčíslete tento výraz. Měli byste dostat, že je to $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ (případně plus π) — tomu se říká *věta o vrcholovém úhlu*.