Názorné derivování aneb jedeme autem

1 Jedeme autem po dálnici. Naši polohu x určíme pomocí kilometru dálnice, kde právě jsme. Právě jedeme rychlostí $v = 100\,\mathrm{km/h}$ a jsme v poloze $x = 75\,\mathrm{km}$. Pomocí diferenciálu odpovězte na následující otázky:
1. Kde (na kolikátém kilometru) budeme za dvě minuty? A kde jsme byli před minutou?
2. Delší dobu už máme pořád sešlápnutý plyn a díky tomu zrychlujeme. Derivace rychlosti podle času je $a = 10\,\mathrm{km\,h^{-1}\,min^{-1}}$. Jak rychle pojedeme za dvě minuty? A jak rychle jsme jeli před minutou?
3. Spotřeba bensinu je momentálně $S = 7\,\mathrm{l/100\,km}$. Také známe její derivaci podle *rychlosti*: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}v} = 0{,}1\,\frac{\mathrm{l/100\,km}}{\mathrm{km/h}}$. Jak velkou okamžitou spotřebu budeme mít za dvě minuty? A jak velká byla před minutou?
4. Bensin stojí 40 Kč za litr. Určete rychlost utrácení peněz za bensin (Kč na 100 km a pak i Kč na hodinu) za dvě minuty a před minutou.
5. Řekněme, že máme velkou rodinu, a proto jedou dvě auta. V jednom je bensin za 40 Kč za litr, v druhém je levnější, který stál jen 30 Kč na litr. Určete rychlost utrácení peněz za bensin pro celou rodinu za dvě minuty a před minutou.
6. Dítě v autě sleduje ukazatele kilometrů na dálnici i rychlost auta najednou. Jaká bude rychlost, až auto ujede další kilometr? A jaká byla před dvěma kilometry? Určete fysikální rozměr (tj. jednotku) této derivace. Dává Vám to smysl?
7. Co kdyby se dítě zaměřilo spíš na tachometr? Na jakém kilometru budeme, až bude rychlost 112 km/h? A na kterém jsme byli při 94 km/h? Jaké jsou jednotky teď?
8. Starší bratr tohoto dítěte se zajímá o fysiku, a tak ho zajímá kinetická energie auta $E = \frac{1}{2}mv^2$. O kolik procent bude vyšší oproti současné hodnotě, až budeme na 77. kilometru? A o kolik procent nižší byla na 74.?

2 Přibližně vypočtěte pomocí diferenciálu:
1. $\sqrt{15}$ a $\sqrt{17}$, víte-li, že derivace funkce $\sqrt{x}$ v bodě 16 je rovna $\frac{1}{8}$.
2. $\sin\frac{4\pi}{18}$ a $\sin\frac{5\pi}{18}$, víte-li, že derivace funkce $\sin x$ v bodě $\frac{\pi}{4}$ je rovna $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Zkuste si výsledky ověřit na kalkulačce

Obecná pravidla pro derivování

3 Ukažte, že derivace konstantní funkce je vždy 0.

4 Ukažte, že derivace je *lineární*. Tedy že pokud α a β jsou konstanty, platí $\mathrm{d}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\mathrm{d}f(x) + \beta\mathrm{d}g(x)$.

5 Řekněme, že máme funkci $f(u)$; její diferenciál je $\mathrm{d}f = f'(u)\,\mathrm{d}u$. A teď si představme, že u je ještě funkcí x. Napište, jak bude vypadat diferenciál $\mathrm{d}u$. Pak ho dosaďte do prvního vztahu a zjistěte, čemu se rovná $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Výslednému vztahu se říká *řetězové pravidlo*.

6 Mějme funkce $f(x)$ a $g(x)$. Napište jejich diferenciály. Pak zjistěte, jak zapsat $\mathrm{d}(fg)$, tj. diferenciál součinu. Výslednému vztahu se někdy říká *Leibnizovo pravidlo*.

7 Nakonec si dokážeme tzv. *větu o inversní funkci*. Mějme nějakou funkci $f(x)$ a označme $f^{-1}(x)$ funkci k ní inversní. Pak určitě platí $f^{-1}(f(x)) = x$. Derivujte obě strany této rovnosti, vlevo využijte řetězové pravidlo a vyjádřete derivaci inversní funkce $(f^{-1})'(x)$.