Hledání extrémů

1 Najděte lokální extrémy následujících funkcí a určete, jde-li o minimum či o maximum:

1. $\sin x$ (nejdřív to uhodněte z obrázku a pak teprve derivujte); **2.** $\frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$; **3.** $x\mathrm{e}^{-x}$; **4.** $|x|$ (zas si nakreslete obrázek).

2 Zjistěte, jakou největší část plochy půlkruhu může zabírat obdélník, který je do něj vepsán.

3 Jaký poměr stran má mít kvádrový bazén s čtvercovým dnem, aby se při zadaném objemu spotřebovalo co nejméně materiálu na obložení dna a stěn?

Tečny

4 Napište rovnici přímky, která má zadanou směrnici k a která prochází zadaným bodem $[x_0; y_0]$. (Rovnice je ve tvaru $y = kx + c$. Dosaďte souřadnice bodu a vypočtěte c.)

5 Mějme funkci $y(x) = x \sin x$.

1. Zjistěte hodnotu této funkce v bodě $x = \frac{\pi}{2}$. **2.** Zjistěte směrnici tečny $k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ v témže bodě. **3.** Dosaďte tyto údaje do rovnice odvozené v předchozím bodě. Tím jste získali rovnici tečny k této funkci v bodě $\pi/2$.

6 Najděte rovnici tečny k funkci $y = x^2 - x + 1$ v bodě $x = 1$.

7 Odvoďte vztah $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$. (Použijte definici $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a součtové vzorce pro sinus a kosinus. Dělte čitatel i jmenovatel oběma kosiny.)

8 S pomocí právě odvozeného vzorce zjistěte, pod jakým úhlem se protínají křivky $y = \sin x$ a $y = \cos x$.

Přibližné počítání

9 V následujících úlohách počítejte jen s papírem a tužkou.

1. Napište diferenciál funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x = 8$. Pak pomocí něj přibližně vyčíslete $\sqrt[3]{8{,}12}$.
2. Napište diferenciál funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě $x = 5$. Pak pomocí něj přibližně vyčíslete $\frac{1}{4{,}9}$. (Pomůcka: $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{1}{25} = 0{,}04$)
3. Napište diferenciál funkce $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ v bodě $x = 0$. Pak přibližně vypočtěte $\sqrt[3]{\frac{0{,}97}{1{,}03}} - \sqrt[3]{\frac{1{,}03}{0{,}97}}$.

10 Hodíte míč rychlostí $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pod úhlem $\alpha = 30°$ a dohodíte asi 8,83 m. Určete přibližně pomocí diferenciálu, oč dál dohodíte, pokud:
1. hodíte o 10 % vyšší rychlostí; **2.** hodíte pod úhlem o 5° větším.
Dolet míče je dán vztahem $D = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$, který už jste asi viděli v mechanice.