

I Máme čtvercový kus plechu o straně a , z něhož chceme udělat hranatou nádobu. V rozích odřežeme čtyři čtverečky, načež čtyři postranní části ohneme nahoru a spojíme. Jak vysokou máme nádobu udělat, chceme-li, aby měla co největší objem?

2 Z válcového kmene chceme vytesat trám obdélného průřezu tak, aby měl co největší nosnost. Jaký má být poměr stran, je-li nosnost úměrná součinu šířky a čtverce výšky trámu?

3 Jaký tvar má mít válec, aby měl při zadaném objemu co nejmenší povrch?

4 Do jaké výšky máme pověsit lampu nad střed kruhového stolu o poloměru r , chceme-li, aby byla na kraji stolu co možná největší intenzita osvětlení? Intenzita je v každém bodě stolu rovna $\frac{k \sin \varphi}{r^2}$, kde φ je úhel mezi dopadajícími paprsky a deskou stolu, r je vzdálenost daného bodu od lampy a k je konstanta úměrnosti.

5 Máme elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Zjistěte, z jakého bodu na této elipse je to do vrcholu $[0; b]$ co možná nejdál.

6 Z jednoho metru krychlového chceme odlít abstraktně uměleckou sochu: kouli postavenou na krychli. Jaké rozměry má mít koule a krychle, aby byl výtvar co nejvyšší?

7 Z kruhu o poloměru r vyřízneme výseč se středovým úhlem φ a rovné části slepíme k sobě, takže vznikne kornout. Jaký má být středový úhel, aby byl objem výsledného kornoutu co největší? (**Nápověda:** Výseč má obvod φ (nepočítáme-li části, které se později slepí). Z tohoto obvodu se po slepení stane obvod podstavy kužele.)

8 Ze silnice o šířce a odbočuje pod pravým úhlem menší silnička o šířce b . Jaká je největší délka vozidla, které se na odbočce dokáže vytočit, aniž by opustilo vozovku?

9 Ukažte, že hyperboly $x^2 - y^2 = a$ a $xy = b$ tvoří *ortogonální síť*, tedy jakákoli hyperbola z první množiny protíná jakoukoli hyperbolu z druhé množiny pod pravým úhlem.

IO Nakresleme graf funkce $1/x$ a přiložme k němu tečnu v bodě $x_0 > 0$. Zjistěte plochu trojúhelníka vymezeného souřadnými osami a touto tečnou.

II Uvažme funkci $f(x) = xe^x$. Zjistěte následující:

1. Její derivaci $f'(x)$. Zjistěte, kde je tato funkce rostoucí a kde klesající. Má někde extrém? Pokud ano, řekněte, jestli je to minimum, nebo maximum.
2. Jak se tato funkce chová, pokud je x opravdu hodně velké? A jak se chová, je-li x opravdu hodně velké záporné? Jaká je hodnota v nule?
3. Na základě těchto indicií zkuste načrtnout graf.