Hledání extrémů

$\boxed{1}$ **Ad 1.** V $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ jsou maxima, v $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ jsou minima. **Ad 2.** Derivace je $\frac{br-2a}{r^3}$, extrém je v $r=2a/b$. Je-li $a>0$, $b>0$, musí to být minimum (derivace je před tím bodem záporná a za ním kladná). **Ad 3.** Derivace je $\mathbf{e}^{-x}(1-x)$, jediný extrém je v bodě $x=1$ a je to maximum ($\mathbf{e}^{-x}>0$ a $1-x$ je vlevo od jedničky kladné a vpravo záporné). **Ad 4.** Tady je jediný extrém v $x=0$ a tam zrovna derivace neexistuje! Takže pozor na to. Extrém může být i v bodě, kde derivace neexistuje.

$\boxed{2}$ Dáme obdélník středem jedné strany do středu půlkruhu a protější dva rohy pak musí být na té kružnici. Je-li základna $2a$ a výška h, bude z Pythagorovy věty $a^2+h^2=r^2$. Takže v ploše obdélníka $2ah$ můžeme dosadit $h=\sqrt{r^2-a^2}$ a derivovat podle a. Vyjde $2a\sqrt{r^2-a^2}\left[\frac{1}{a}-\frac{a}{r^2-a^2}\right]$, to má být 0, takže $a^2=r^2/2$. Proto pro plochu obdélníka máme $S^2=4a^2h^2=r^4$, tj. $S=r^2$ a plocha půlkruhu je $\pi r^2/2$. Největší obdélník tedy zabírá $2/\pi\approx 63{,}7\,\%$ půlkruhu.

$\boxed{3}$ Dno má stranu a, výška je h, tj. objem je $V=a^2h$. Z toho můžeme vypočíst $h=V/a^2$. Chceme minimalisovat povrch, tj. plochu dna (a^2) a čtyř stěn (ah). Máme tedy $S=a^2+4ah=a^2+4V/a$. Derivujme, obdržíme $2a-4V/a^2=0$, tj. $a=\sqrt[3]{2V}$, $h=\sqrt[3]{V/4}=a/2$. Proto musí být výška oproti straně dna poloviční.

Tečny

$\boxed{4}$ $y-y_0=k(x-x_0)$.

$\boxed{5}$ **Ad 1.** $\frac{\pi}{2}$. **Ad 2.** $(x\sin x)'=x\cos x+\sin x$. Dosadíme $x=\frac{\pi}{2}$ a dostaneme $k=1$. **Ad 3.** Je $y_0=\frac{\pi}{2}=x_0$, takže po dosazení $y=x$.

$\boxed{6}$ Obdobně: $y(1)=1$, $y'=2x-1$, takže $k=1$ a zase máme $y=x$.

$\boxed{7}$ $\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$.

$\boxed{8}$ Nejdřív musíme zjistit, kde se protínají. To je např. v bodě $\pi/4$. Ten tedy pro začátek prozkoumejme. Máme $(\sin x)'=\cos x$ a $(\cos x)'=-\sin x$. Víme, že derivace je tangenta úhlu, který graf v daném bodě svírá s vodorovným směrem. Takže graf sinu jde nahoru pod úhlem $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ a graf kosinu pod úhlem $-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (protože kosinus klesá). Úhel mezi nimi je rozdíl obou úhlů, tedy $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 70^{\circ}\!{,}5$.

Přibližné počítání

$\boxed{9}$ **Ad 1.** Máme $\mathrm{d}f=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{12}$. Zároveň $\sqrt[3]{8}=2$. Takže když posuneme x o $\mathrm{d}x=0{,}12$, hodnota třetí odmocniny se posune o $\mathrm{d}f=\frac{\mathrm{d}x}{12}=0{,}01$. Má tedy vyjít přibližně $2{,}01$. (Skutečně vyjde $2{,}009\,950\ldots$, což se liší jen o $0{,}000\,05$ od našeho přibližného!) **Ad 2.** Diferenciál je $\mathrm{d}f=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}x}{25}$. Přitom $\frac{1}{5}=0{,}04$, $\mathrm{d}f=-(-0{,}1)\cdot 0{,}04=0{,}004$ a výsledek má být $0{,}204$. **Ad 3.** Diferenciál je $\mathrm{d}f=\frac{2/3}{1-x^2}\left(\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\,\mathrm{d}x$, $f(0)=0$, takže $f(-0{,}03)$ je asi $-0{,}04$.

$\boxed{10}$ Diferenciál: $\mathrm{d}D=\frac{2v\sin 2\alpha}{g}\,\mathrm{d}v+\frac{2v^2\cos 2\alpha}{g}\,\mathrm{d}\alpha$. Stejně počítáme přibližně, tak rovnou dáme $g=10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ a máme $\mathrm{d}D=\sqrt{3}\,\mathrm{d}v+10\,\mathrm{d}\alpha$. Hodíme-li o $10\,\%$ rychleji, bude $\mathrm{d}v=1$ a hodíme o $\sqrt{3}\approx 1{,}73$ metru dál. Hodíme-li o $5^\circ=\frac{\pi}{36}\approx 0{,}087$ výš, dohodíme o desetinásobek tohoto čísla dál, tj. asi o 87 cm.

Finální úlohy

1 Odřízneme-li v každém rohu čtvereček o straně λa ($0 < \lambda < \frac{1}{2}$ — strana odříznutých čtverečků nemůže převyšovat polovinu plechu, pak by se tam všechny nevešly), dostaneme nádobu s výškou λa a čtvercovým dnem o straně $(1-2\lambda)a$. Její objem je tedy $\lambda(1-2\lambda)^2 a^3$. Derivujeme podle λ a položíme rovno nule; dostaneme

$$(1-2\lambda)^2 - 4\lambda(1-2\lambda) = 12\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0,$$

což má dva kořeny, $\lambda = \frac{1}{6}$ a $\lambda = \frac{1}{2}$. Máme tedy tři kandidáty na globální extrém: kraje intervalu $\lambda = 0$ a $\lambda = \frac{1}{2}$, v nichž je objem nádoby nulový, a $\lambda = \frac{1}{6}$, kde je roven $\frac{2}{27}a^3$.

2 Řekněme, že trám bude mít strany $2a$ a $2b$, přičemž $a^2 + b^2 = R^2$, kde R je poloměr kmene. Řekněme taky, že třeba $b > a$; pak je nosnost úměrná $8ab^2$. Vyjádříme $b^2 = R^2 - a^2$, čímž obdržíme pro nosnost $8aR^2 - 8a^3$. Derivujeme a položíme rovno nule, vyjde $R^2 - 3a^2 = 0$, takže kratší strana trámu bude $R/\sqrt{3}$ a delší pak $\sqrt{2}R/\sqrt{3}$. Výsledek lze formulovat i tak, že chceme vytesat trám o poměru stran $1 : \sqrt{2}$ (což je mimochodem stejný poměr stran, jako má papír A4 ◡̈).

3 Dno nechť má stranu a a výška nechť je h. Pak máme $a^2 h = V = \text{const.}$ a chceme minimalisovat $S = a^2 + 4ah$. Vložíme $h = V/a^2$ a minimalisujeme podle a; po derivování a položení rovno nule dostaneme $2a - 4V/a^2 = 0$, takže $a = \sqrt[3]{2V}$ a $h = V/a^2 = \sqrt[3]{V/4}$; proto má být výška rovna polovině strany dna.

4 Řešíme podobně jako v předchozí úloze: objem válce je $V = \pi r^2 h$, takže jeho výšku vyjádříme jako $h = V/\pi r^2$. Minimalisujeme povrch $S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, derivujeme a položíme rovno nule, čímž obdržíme $4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$. Z toho pak už zjistíme, že $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ a $h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r$. Válec tedy má být stejně vysoký jako široký.

5 Lampa je nad prostředkem stolu, takže mezi ní a krajem stolu máme pravoúhlý trojúhelník o stranách h, r a 1. Z toho jednak vidíme, že $r = \sqrt{1+h^2}$, jednak též vidíme, že $\sin\varphi = \frac{h}{r}$. Tím jsme vyjádřili intensitu pomocí h jako $I = \frac{kh}{(1+h^2)^{3/2}}$. Derivujme, dostaneme $I' = I \cdot \left[\frac{1}{h} - \frac{3}{2}\frac{2h}{1+h^2}\right]$. Položíme-li to rovno nule, dostaneme buď $h = 0$, což je zjevně minimum, nebo $1 + h^2 - 3h^2 = 0$, tj. $h = \sqrt{2}$, což je maximum.

6 Hledáme extrém čtverce vzdálenosti $x^2 + (y-b)^2$, přičemž x a y jsou vázány rovnicí elipsy. Z ní vyjádříme třeba x pomocí y a dostaneme $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$, takže čtverec vzdálenosti je

$$d^2 = a^2 + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 - 2yb + b^2.$$

Extrém bychom mohli najít i bez derivování (jen doplněním na čtverec), ale když už umíme derivovat, tak toho využijme. Dostaneme $-2\frac{a^2-b^2}{b^2}y - 2b = 0$, takže musí být $y = -\frac{b^3}{a^2-b^2}$. Tomu odpovídají dvě možné x-ové souřadnice

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{b^4}{(a^2-b^2)^2}\right) = a^2\frac{a^4 - 2a^2b^2}{(a^2-b^2)^2} \implies x = \pm\frac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-2b^2}.$$

7 Celkový objem výtvoru je fixovaný: $V = a^3 + \frac{4\pi}{3}r^3$. My chceme hledat extrém výšky, tj. veličiny $H = a + 2r$. Do toho dosadíme např. $a = \sqrt[3]{V - \frac{4\pi}{3}r^3}$, derivujeme podle r a položíme rovno nule. Vznikne rovnice $\frac{4\pi}{3}r^2 = 2(V - \frac{4\pi}{3}r^3)^{2/3}$. Umocníme na $3/2$ a po přerovnání získáme $r^3 = \frac{V}{\frac{4\pi}{3}\left(1+\sqrt{\pi/6}\right)}$. Dosadíme do prvního vztahu pro objem, získáme $a^3 = V\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}+\sqrt{6}}$. Po dělení lze zjistit, že $\frac{a}{r} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

8 Obvod výseče je prostě φ a stejný je i obvod podstavy kornoutu. Jeho poloměr je tedy dán rovnicí $2\pi r = \varphi$. Z druhé strany taky víme, že poloměr původní výseče (rovný jedné) je po slepení vzdálenost mezi špičkou a obvodem kornoutu. Pro výšku kornoutu h tedy platí Pythagorova věta: $r^2 + h^2 = 1$. Objem kornoutu je roven $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{24\pi^2}\varphi^2\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}$. Derivujeme a položíme rovno nule, dostaneme $V\left[\frac{2}{\varphi} - \frac{1}{2}\frac{2\varphi}{4\pi^2-\varphi^2}\right] = 0$. Závorka se bude rovnat nule při $\varphi = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, a při tomto úhlu nastává maximum objemu $\frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

9 Auto se nejlíp vytočí tak, že jeden jeho bod bude přímo v rohu odbočky. Pokud s krajnicí svírá úhel φ, může být ta část, která je v širší silnici, mít nejvýše délku $\frac{a}{\cos\varphi}$, a ta, která je v užší, nejvýše $\frac{b}{\sin\varphi}$. Celkem tedy maximální délka auta, které svírá s krajnicí úhel φ, je $\frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi}$. Derivujme a položíme rovno nule, tím dostaneme rovnici $a\sin^3\varphi = b\sin^3\varphi$, a tak získáme $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Dosadíme-li to zpět do $\frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi}$, dostaneme po použití vztahů $\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ a $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ a nějakých úpravách vztah $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

Poznamenejme ještě, že tohle je *minimum*. Auto totiž musí při zatáčení projet postupně všemi úhly od $\pi/2$ až do nuly, a pokud by jeho délka přesáhla toto minimum, někde by vyjelo ze silnice.

10 První hyperboly mají rovnici $y_1 = \sqrt{x^2 - a}$, druhé $y_2 = b/x$. Derivujme: $y_1' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a}}$ a $y_2' = -\frac{b}{x^2}$. Kde je průsečík těchto dvou křivek? Tam, kde se rovnají obě souřadnice. Bude se tedy rovnat $y_1 = y_2$, a proto má být $b/x = \sqrt{x^2 - a}$. Dáme na druhou a máme $x^2 - a - b^2/x^2 = 0$, takže průsečík má splnit rovnici $x^4 - ax^2 - b^2 = 0$.

Z druhé strany: rozdíl úhlů musí být $\frac{\pi}{2}$, takže má být

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = „\infty“,$$

protože chceme dokázat, že jsou na sebe kolmé. Abychom dostali nekonečno, musí se $1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0$ vynulovat. Místo tangent dosadíme ty derivace a mělo by být

$$1 - \frac{b}{x\sqrt{x^2 - a}} = 0.$$

To už přepíšeme snadno na $x\sqrt{x^2 - a} = b$ a po umocnění dostáváme tu samou rovnici $x^4 - ax^2 - b^2 = 0$. Ta je v průsečíku splněna a proto jsou obě křivky na sebe kolmé.

11 V bodě x je derivace $-1/x^2$, takže tečna musí být $y - 1/x_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$. Průsečík s osou x je tam, kde je $y = 0$, tj. při $x - x_0 = x_0$, tedy v $x = 2x_0$. Naopak průsečík s osou y je tam, kde je $x = 0$, což je v bodě $y = 2/x_0$. Je tedy vidět, že plocha trojúhelníka je konstantní a rovna 2.

12 **Ad 1.** Derivace je $\mathbf{e}^x(1 + x)$. Jelikož $\mathbf{e}^x > 0$, je derivace záporná při $x < -1$, kladná při $x > -1$ a nulová při $x = -1$. Proto je extrém v $x = -1$. Vlevo od něj je funkce klesající, vpravo je rostoucí, jde tedy o minimum. **Ad 2.** Při hodně velkém x funkce roste mega moc rychle (ještě rychleji než exponenciála). Při velkém záporném je $\mathbf{e}^x$ velmi blízko nule a hodnota je strašně malá záporná. V nule je nula. **Ad 3.** Kreslíme zleva: skoro vodorovnou čáru těsně pod x-ovou osou, pak dolík v bodě $[-1; -1/\mathbf{e}]$. Pak už funkce roste, prochází nulou pod úhlem $45°$ a pak roste mega moc rychle.