

I Vypočítejte derivace následujících funkcí — měla by Vám stačit pravidla o derivaci součtu a součinu. a a b jsou reálné konstanty.

1. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$; 2. $(x-a)(x-b)$; 3. $\frac{x - \sin x \cos x}{2}$; 4. $x^2\sqrt{x} - x^3\sqrt{x^2}$; 5. $(1-\sqrt{x})(1+x)$;
 6. $-\frac{x}{2} + \frac{1+x^2}{2} \operatorname{arc\,tg} x$; 7. $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$; 8. $x^2 e^x \sin x$;

2 Už víme, že $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$:

1. Pomocí řetězového pravidla spočítejte $(\frac{1}{g(x)})'$, kde $g(x)$ je libovolná funkce.

2. Spočítejte též $(\frac{f(x)}{g(x)})'$. (Derivujte jako součin $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$.)

3 Pomocí pravidla z minulého bodu derivujte následující funkce:

1. $\operatorname{tg} x$; 2. $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 3. $\frac{x \ln x}{1 + \ln x}$; 4. $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$; 5. $\frac{(1-x)^a}{(1+x)^b}$.

4 Pomocí věty o inverzní funkci nalezněte derivace následujících funkcí:

1. \sqrt{x} ; 2. $\operatorname{arc\,tg} x$ (náповěda: dokažte $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$); 3. $W(x)$, což je funkce inverzní k $x e^x$.

5 Na tyto příklady už bude potřeba i řetězové pravidlo (derivace složené funkce):

1. $\ln \cos x$; 2. $2x - (1-x^2) \ln \frac{1+x}{1-x}$; 3. $\ln(\ln(\ln x))$; 4. $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{\cos 2x}{8}$; 5. $\frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$;
 6. $\operatorname{tg}^4 x - 2 \operatorname{tg}^2 x - 4 \ln \cos x$; 7. $\operatorname{arc\,ctg} \sqrt{1-x^2}$; 8. $x(\operatorname{arc\,sin} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,sin} x - 2x$;
 9. $e^{\sin x + \cos x}$; 10. $2^{\operatorname{tg} x}$; 11. $e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$; 12. $x^{(a^x)} + a^{(x^a)} + a^{(a^x)}$.

6 Zkuste také tyto ještě zákeřnější příklady:

1. $e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}$; 2. $\frac{\operatorname{arc\,sin} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$; 3. $\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$;
 4. $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$; 5. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$;
 6. $\frac{\operatorname{arc\,cos} x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}$; 7. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}$.

7 Někdy je zapotřebí funkci před derivováním trochu přepsat. V následujících příkladech se to týká mocnin:

1. x^x . Tady přepište $x^x = e^{x \ln x}$ a pak derivujte; 2. $x^{(x^x)}$; 3. $(\sin x)^{\cos x}$; 4. $(\ln x)^{\operatorname{tg} x}$.

8 Samozřejmě můžeme derivovat i výrazy obsahující libovolnou funkci. Řekněme, že y je nějaká funkce x ; pak můžeme například podle řetězového pravidla psát $(y^2)' = 2y \cdot y'$ (y^2 se derivuje na $2y$ a $y(x)$ je vnitřní funkce, která se derivuje na y'). Podobně derivujte i následující výrazy:

1. $x^2 \cdot y$; 2. $y \sin y$; 3. e^y/y ; 4. $y^3 + y^2 + y$.