K Taylorovi

1 Píšu nejdřív úplný rozvoj pomocí sumy, za ním jen prvních pár členů až do z^2:

1. $\mathrm{e}^{-k^2z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{k^{2n}z^{2n}}{n!} = 1 - k^2z^2 + \cdots;$

2. $\frac{1}{2+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 + \cdots;$

3. $1 + \ln(1+z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n} = 1 + z - \frac{z^2}{2} + \cdots;$

4. $\frac{\ln(1-z)}{z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = -1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{3} - \cdots;$

5. $\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\frac{z^{2n}}{a^{2n+1}} = 1 - \frac{z^2}{2a^3} + \cdots;$

6. $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} + 2\cos z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} = 1 + \cdots;$

7. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z + \cdots;$

2 **1.** $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots;$ **2.** $-x^2 + \cdots;$ **3.** $(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots)(1 - x + x^2 + \cdots) = 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 + \cdots;$ **4.** $\frac{2x}{a^3} - \frac{3x^2}{a^4} + \cdots;$ **5.** $x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots.$

3 **1.** 0 (první člen je až $\frac{2}{3}a^2/x^{4/3}$); **2.** $\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{8x} + \cdots;$ **3.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \cdots;$ **4.** $\exp(1 - \frac{1}{2x} + \cdots) =$

4 Viz bod 1, kde jsou všechny rozvoje vypsány.

5 **1.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)\frac{x^n}{3};$ **2.** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n};$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4n+7}{3^{n+2}} + (-1)^n\right)\frac{x^n}{16};$ **4.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\right.$

6 **1.** Tohle už je docela obtížná úloha. Nejdřív se podívejme na to, jak z rozvoje pro $\sin x$ udělat $\sin^2 x$. Prostě napíšeme dva rozvoje pro $\sin x$ a přenásobíme je mezi sebou takto:

$$\sin^2 x = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{k+\ell}\frac{x^{2k+2\ell+2}}{(2k+1)!(2\ell+1)!}.$$

V tom přejdeme k nové proměnné $p = k + \ell$. Je-li tento součet fixovaný, znamená to, že k pak může už běžet jen od nuly (to je jeho nejmenší hodnota vůbec) až po p (víc ne, protože ℓ taky nemůže být záporné). Takže přepíšeme sumu na toto (přitom všude dáváme $\ell = p - k$):

$$\sin^2 x = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p x^{2p+2}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{(2k+1)!(2p-2k+1)!}.$$

Vnitřní zlomek rozšíříme $(2p+2)!$ a přečíslujeme členy tak, že nebudeme sčítat přes p, ale přes $r = p + 1$.

Pak r začíná od jedničky a máme

$$\sin^2 x = -\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r x^{2r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(2r)!}{(2k+1)!(2r-2k-1)!} = -\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r x^{2r}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{2r}{2k+1}.$$

Pro kosinus na druhou zcela obdobným přístupem dostaneme

$$\cos^2 x = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}\sum_{k=0}^{p}\binom{2p}{2k}.$$

Sečteme to. Máme pouze sudé mocniny a absolutní člen je pouze v $\cos^2 x$; odtamtud dostaneme 1. Máme tedy toto:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!}\sum_{k=0}^{2r}(-1)^k\binom{2r}{k}.$$

Ale vnitřní suma se dá podle binomické věty zapsat jako $(1-1)^{2r} = 0$, takže celá dvojitá suma vypadne a zůstane jen jednička. Tak to má být.

2. $\left[\dfrac{\ln(1+z)}{z}\right]^2 = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H_{n+1}\frac{z^n}{2n+4}$, kde $H_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}$ je součet převrácených hodnot prvních k přirozených čísel.

8 Obdrží se následující:

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi = \sin\left(\frac{k+1}{2}\varphi\right)\frac{\sin\frac{k\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}};$$

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi = \cos\left(\frac{k+1}{2}\varphi\right)\frac{\sin\frac{k\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

10 Máme $\mathfrak{Im}\, z = \frac{z-z^\star}{2\mathrm{i}}$, takže musí být $\mathfrak{Im}\ln(1+\mathrm{i}t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\ln(1+\mathrm{i}t) - \ln(1-\mathrm{i}t)\right)$ díky tomu, že podle předchozí úlohy můžeme komplexní sdružení zandat dovnitř logaritmu. Rozvojem se obdrží

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots,$$

takže po dosazení $z = \mathrm{i}t$ obdržíme řadu pro arkustangentu

$$\operatorname{arc\,tg} t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Limity

1 **1.** 1; **2.** $\frac{a}{b}$; **3.** e; **4.** $\frac{1}{2}$.

2 **1.** $\frac{1}{a}$; **2.** $\frac{1}{2}$; **3.** $-\frac{1}{12}$; **4.** 3; **5.** $\frac{3}{2}$; **6.** $\frac{a^2}{b^2}$.

3 **1.** e; **2.** $\frac{a+b}{2}$; **3.** 2.

4 **1.** $\frac{4}{3}$; **2.** $\frac{1}{\sqrt{2a}}$; **3.** $\frac{m-n}{2}$; **4.** $\frac{1}{a}$.