Taylor bez Taylora

1 **Bez použití Taylorova vzorce** rozviňte následující funkce v řady kolem $z = 0$. Napište rozvoj až do z^2.
1. $\mathrm{e}^{-k^2z^2}$; **2.** $\frac{1}{2+z}$; **3.** $1 + \ln(1+z)$; **4.** $\frac{1}{z}\ln(1-z)$; **5.** $\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}$; **6.** $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} + 2\cos z)$;
7. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$.

2 Šikovným nahrazováním funkcí částmi jejich rozvojů aproximujte následující funkce. x považujte za malé a počítejte jen do x^2.
1. $\frac{1}{x}\ln(1+x)$; **2.** $\ln(1-x)\sin x$; **3.** $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$; **4.** $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+x)^2}$; **5.** Zde počítejte do x^3: $\frac{\sin x}{\cos x}$.
6. Můžete si též zkusit najít prvních pár členů pro rozvoje v předchozí úloze přenásobením patřičných řad.

3 Díky rozvojům dokážeme i vyšetřit chování funkcí pro hodně *velké* x. Prostě využijeme toho, že když je x hodně velké, pak $1/x$ je hodně malé. V následujících příkladech počítejte do $1/x$:
1. $\sqrt[3]{x^2+a^2} - \sqrt[3]{x^2-a^2}$; **2.** $\sqrt{(x+a)(x+b)} - x$; **3.** $\frac{1}{1+x}$ (zde počítejte do $1/x^3$);
4. $(1+\frac{1}{x})^x$ (zapište to jako exp ln té funkce).

Nekonečný Taylor

4 Rozložte v nekonečnou řadu některé funkce z úlohy číslo 1. Zejména zkuste takto rozložit funkce z bodů 1–4.

5 Rozložte v nekonečnou řadu kolem $x = 0$ následující funkce:
1. $\frac{1}{2-x-x^2}$; **2.** $\frac{1}{1-x^2}$; **3.** $\frac{1}{(x+1)(x-3)^2}$; **4.** $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

6 Rozvoje se dají i násobit mezi sebou jako polynomy — každý člen s každým. Pro konečný počet sčítanců jste si to zkusili už v úloze 4. Teď to zkuste pro celé nekonečné rozvoje.
1. Napište rozvoje pro $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ a sečtěte je. Měli byste dostat jedničku.
2. Napište rozvoj pro funkci $\left[\frac{\ln(1+z)}{z}\right]^2$.

Komplexní Taylor

7 Napište řadu pro $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ (zde $\mathrm{i}^2 = -1$ je imaginární jednotka). Oddělte reálnou a imaginární část. Přesvědčte se, že reálnou část tvoří řada pro $\cos x$ a imaginární zas řada pro $\sin x$. Tím dokažte vzorec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$.

8 Do rozvoje $z + z^2 + \cdots + z^k = \sum_{n=k}^{\infty} z^n = \frac{z-z^{k+1}}{1-z}$ dosaďte $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Oddělte reálnou a imaginární část. Obdržíte tak výrazy pro součty $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin k\varphi$ a podobně i s kosiny.

9 Každé komplexní číslo z můžeme zapsat ve tvaru $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, kde $r = |z|$ je velikost a $\varphi = \arg z$ je argument čísla z. Logaritmujte tento výraz a vysvětlete, proč platí $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$. Dále díky tomu, že $z^\star = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$, ukažte, že platí i $(\ln z)^\star = \ln(z^\star)$.

10 Nakreslete si do komplexní roviny číslo $1 + \mathrm{i}t$, kde t je reálné, a ukažte, že jeho argument je roven $\operatorname{arc\,tg} t$. Z toho odvoďte, že

$$\operatorname{arc\,tg} t = \arg(1+\mathrm{i}t) = \mathfrak{Im}\ln(1+\mathrm{i}t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}.$$

Rozviňte tento poslední výraz v nekonečnou řadu podle t. Obdržíte rozvoj pro arc tg t.

II **1.** Ověřte, že platí $1 + \mathbf{e}^{i\varphi} = \mathbf{e}^{i\varphi/2}(\mathbf{e}^{i\varphi/2} + \mathbf{e}^{-i\varphi/2}) = \mathbf{e}^{i\varphi/2} \cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}$.

2. Ukažte, že při $-\pi < \varphi < \pi$ platí $\arg(1 + \mathbf{e}^{i\varphi}) = \frac{\varphi}{2}$.

3. Napište rozvoj $\ln\left(1 + \mathbf{e}^{i\varphi}\right)$ v nekonečnou řadu. Vzavše imaginární část, dokažte

$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \cdots \qquad (-\pi < \varphi < \pi).$$

To je rozklad „zubu“ (periodické funkce, která vypadá jako zuby pily) v nekonečnou řadu sinů, tzv. *Fourierovu řadu.*

4. Zopakujte totéž pro výraz $1 - \mathbf{e}^{i\varphi}$. Rozložte $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathbf{e}^{i\varphi}}{1-\mathbf{e}^{i\varphi}}$ a vezměte imaginární část. Tím zjistěte, že platí

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} + \cdots\right] = 1 \qquad (0 < \varphi < \pi).$$

Pokud se podíváme, jak se to bude chovat v záporných úhlech, zjistíme, že vpravo je funkce lichá. Dostali jsme tedy Fourierovu řadu „schodu“ $\operatorname{sgn}\varphi$, který se periodicky po 2π opakuje.