$\boxed{1}$ Můžeme vyčíslovat i limity, kde x jde k nějakému jinému číslu než nule či nekonečnu. Prostě stačí vhodně x nahradit jinou proměnnou tak, aby ta jiná proměnná šla už do nuly. Vyzkoušejte si to na následujících příkladech:

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$; **2.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x-a}$; **3.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; **4.** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}\right)$.

$\boxed{2}$ Rozložte v nekonečnou řadu kolem $x = 0$ následující funkce:

1. $\dfrac{1}{2-x-x^2}$; **2.** $\dfrac{1}{1-x^2}$; **3.** $\dfrac{1}{(x+1)(x-3)^2}$; **4.** $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Komplexní Taylor

$\boxed{3}$ Napište řadu pro $\mathbf{e}^{ix}$ (zde $i^2 = -1$ je imaginární jednotka). Oddělte reálnou a imaginární část. Přesvědčte se, že reálnou část tvoří řada pro $\cos x$ a imaginární zas řada pro $\sin x$. Tím dokažte vzorec $\mathbf{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$.

$\boxed{4}$ V rozvoji $\frac{1}{1-z}$ položte $z = a\mathbf{e}^{i\varphi}$. Oddělte reálnou a imaginární část. Tím zjistěte rozvoj:

1. $\dfrac{1-a\cos\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ v nekonečnou řadu kosinů; **2.** $\dfrac{a\sin\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ v nekonečnou řadu sinů.

Takovým řadám z kosinů a sinů násobků úhlu φ se říká *Fourierovy řady*.

$\boxed{5}$ Každé komplexní číslo z můžeme zapsat ve tvaru $z = r\mathbf{e}^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ je velikost a $\varphi = \arg z$ je argument čísla z. Logaritmujte tento výraz a vysvětlete, proč platí $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

$\boxed{6}$ Nakreslete si do komplexní roviny číslo $1 + it$, kde t je reálné, a ukažte, že jeho argument je roven $\operatorname{arc\,tg} t$. Z toho odvoďte, že

$$\operatorname{arc\,tg} t = \arg(1+it) = \mathfrak{Im} \ln(1+it).$$

Rozviňte logaritmus v nekonečnou řadu a vemte imaginární část. Obdržíte rozvoj pro $\operatorname{arc\,tg} t$.

$\boxed{7}$ Do rozvoje $z + z^2 + \cdots + z^k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} z^n = \frac{z-z^{k+1}}{1-z}$ dosaďte $z = \mathbf{e}^{i\varphi}$. Oddělte reálnou a imaginární část. Obdržíte tak výrazy pro součty $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin k\varphi$ a podobně i s kosiny.

$\boxed{8}$ **1.** Ověřte, že platí $1 + \mathbf{e}^{i\varphi} = \mathbf{e}^{i\varphi/2}(\mathbf{e}^{i\varphi/2} + \mathbf{e}^{-i\varphi/2}) = \mathbf{e}^{i\varphi/2} \cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}$.

2. Ukažte, že při $-\pi < \varphi < \pi$ platí $\arg(1+\mathbf{e}^{i\varphi}) = \frac{\varphi}{2}$.

3. Napište rozvoj $\ln\left(1+\mathbf{e}^{i\varphi}\right)$ v nekonečnou řadu. Vzavše imaginární část, dokažte

$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \cdots \qquad (-\pi < \varphi < \pi).$$

To je rozklad „zubu“ (periodické funkce, která vypadá jako zuby pily) ve Fourierovu řadu.

4. Zopakujte totéž pro výraz $1 - \mathbf{e}^{i\varphi}$. Rozložte $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathbf{e}^{i\varphi}}{1-\mathbf{e}^{i\varphi}}$ a vezměte imaginární část. Tím zjistěte, že platí

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} + \cdots\right] = 1 \qquad (0 < \varphi < \pi).$$

Pokud se podíváme, jak se to bude chovat v záporných úhlech, zjistíme, že vpravo je funkce lichá. Dostali jsme tedy Fourierovu řadu „schodu“ $\operatorname{sgn}\varphi$, který se periodicky po 2π opakuje.