7. přednáška : LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

$\varphi : U \to V$ $\quad$ U, V vekt. prostory nad $\mathbb{K}$

(1) $\forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$

(2) $\forall a \in \mathbb{K} \ \forall u \in U \quad \varphi(au) = a \cdot \varphi(u)$

(1) + (2) $\iff \forall a, b \in \mathbb{K} \ \forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(au_1 + bu_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2)$

Nejdůležitější příklad $\quad \varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$

$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A \text{ matice } k \times n$$

Další příklady:

(4) $U = \mathbb{R}^M$ = zobrazení z M do $\mathbb{R}$

$V = \mathbb{R}$ $\quad$ vekt. prostory nad $\mathbb{R}$

$m_0 \in M$ nějaký pevný prvek množiny M

$$\varphi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R} \qquad \varphi(f) = f(m_0)$$

Toto je lin. zobrazení: $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : M \to \mathbb{R}$

$$\varphi(af + bg) = (af + bg)(m_0) = a\, f(m_0) + b\, g(m_0)$$
$$= a\varphi(f) + b\varphi(g).$$

(5) U množina všech diferencovatelných fcí na intervalu (a, b)

V množina všech reálných funkcí na (a, b)

Jde o vekt. prostory

$$\varphi : U \to V \qquad \varphi(f) = f' \quad \text{(derivace funkce)}$$

Jde o lin. zobrazení

$$\varphi(f+g) = (f+g)' = f'+g' = \varphi(f)+\varphi(g)$$
$$\varphi(af) = (af)' = a\cdot f' = a\varphi(f)$$

(6) $U = C[a,b]$ spojité fce na $[a,b]$
$V = \mathbb{R}$
$\varphi : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ je opět lineární

$$\varphi(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \varphi(f)+\varphi(g)$$

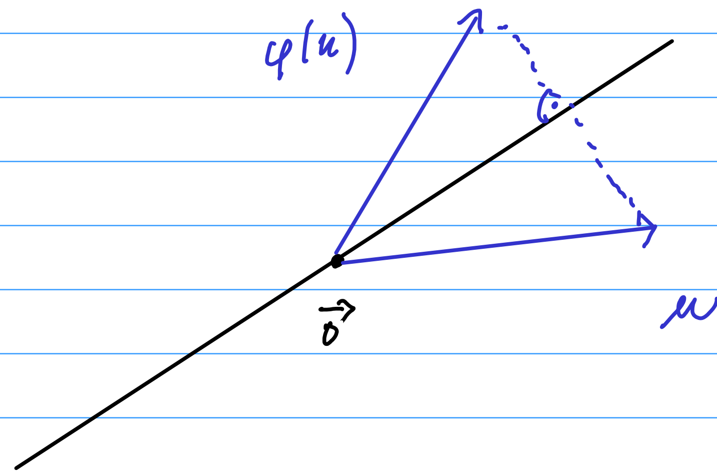
analogicky pro násobek.

(7) Geometrické příklady lin. zobrazení
rovina .... $\mathbb{R}^2$
„prostor" .... $\mathbb{R}^3$

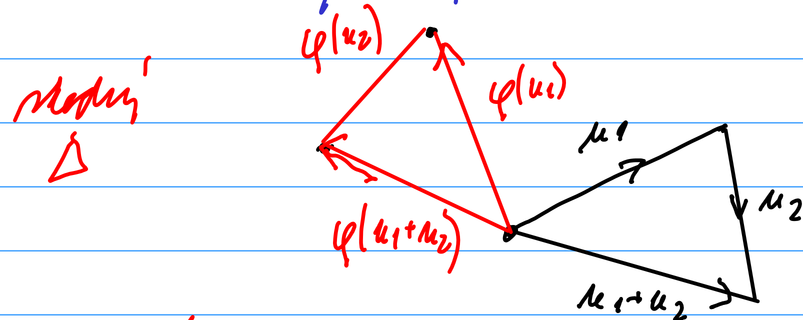
- otočení kolem počátku o úhel α v rovině

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x_1 - \sin\alpha\, x_2 \\ \sin\alpha\, x_1 + \cos\alpha\, x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- symetrie podle přímky procházející počátkem v $\mathbb{R}^2$



je shodné zobrazení – zobrazuje trojúhelník na shodný trojúhelník



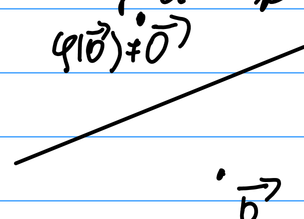
Ze shodnosti plyne, že

$$\varphi(u_1)+\varphi(u_2)=\varphi(u_1+u_2)$$

linearita pro součet

- otočení kolem přímky procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$
- symetrie podle přímky procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$
- symetrie podle roviny procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(\vec{0})=\vec{0}$$



Přímky, roviny neprocházející počátkem určují zobrazení, která nejsou lineární, ale jsou lineárním

Minule: Složení lin. zobrazení a porovnání.

Minule: $\varphi : U \to V$ lineární

$\ker \varphi = \{ u \in U \, ; \, \varphi(u) = \vec{o} \} \subseteq U$

$\operatorname{im} \varphi = \{ v \in V \, ; \, \exists u \in U \;\; v = \varphi(u) \} \subseteq V$

Lemma: $\varphi : U \to V$ lineární je prosté, právě když

$$\ker \varphi = \{ \vec{o} \}.$$

Z definice zobrazení na (surjektivního zobrazení) plyne, že φ je na (surjektivní) právě když $\operatorname{im} \varphi = V$.

Lemma: Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární a je bijekce (je prosté a na). Pak inverzní zobrazení

$$\varphi^{-1} : V \to U$$

je rovněž lineární.

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \qquad \varphi(x) = Ax$

φ je injektivní (= prosté), právě když $\ker \varphi = \{ \vec{o} \}$

Rovnice $Ax = 0$ má pouze triv. řešení

$(A) \rightsquigarrow$ (schod. tvar) Schod. tvar nemá nulový řádek.

A má inverzní matici $(A, E) \rightsquigarrow$ (schod. tvar, B)

$$\rightsquigarrow (E, A^{-1})$$

$\varphi(x) = Ax \qquad / \; A^{-1} \cdot$

$\underbrace{A^{-1} \varphi(x)}_{y} = x$ Inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$$\varphi^{-1}(y) = A^{-1} y$$

Definice: Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$, které je bijektivní se nazývá **lineární izomorfismus.**

Důležitý příklad U vekt. prostor dim n nad $\mathbb{K}$ s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Zobrazení $(\ )_\alpha$ je lin. izomorfismus.

Linearita: $u, v \in U$ $\quad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (v)_\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Jaké souřadnice má vektor $cu + dv$, $c, d \in \mathbb{K}$?

$$u = \sum_1^n a_i u_i \qquad v = \sum_{i=1}^n b_i u_i$$

$$cu + dv = c\left(\sum a_i u_i\right) + d\left(\sum b_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n (c a_i + d b_i) u_i$$

$$(cu + dv) = \begin{pmatrix} ca_1 + db_1 \\ ca_2 + db_2 \\ \vdots \\ ca_n + db_n \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = c(u)_\alpha + d(v)_\alpha$$

$(\ )_\alpha$ je na: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, ať

$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \qquad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$(\ )_\alpha$ je prosté, stačí $\ker (\ )_\alpha = \{\vec{0}\}$

Nechť $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n = \vec{0}$

$v_1, v_2, \dots v_k$ lin. nezávislé v U $\Leftrightarrow$ $(v_1)_\alpha, (v_2)_\alpha, \dots (v_k)_\alpha$ jsou lin nez. v $\mathbb{K}^n$

Důležité α, β dvě různé báze
$(u)_\alpha \neq (u)_\beta$.

Lemma: Je-li $\varphi : U \to V$ lineární a $\psi : V \to W$ lineární, tak zobrazení $\psi \circ \varphi : U \to W$ je lineární.

Důležitý příklad $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$, $\psi : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^r$

$\varphi(x) = Ax$, $\psi(y) = By$ A typu $k \times n$, B typu $r \times k$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(Ax) = B(Ax) = (B \cdot A) \cdot x$$

Skládání lin. zobrazení odpovídá násobení matic.

Věta o dimenzi jádra a obrazu

Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení.
Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U < \infty$. Potom $\dim_{\mathbb{K}} \ker\varphi < \infty$ a $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im}\varphi < \infty$ a platí

$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} \ker\varphi + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im}\varphi .$$

Důsledek

Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení a nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$.

Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) φ je lineární izomorfismus

• (2) φ je prosté $(\ker\varphi = \{\vec{o}\})$

• (3) φ je na $(\operatorname{im}\varphi = V)$

Důkaz důsledku:

(1) $\Rightarrow$ (2) $\wedge$ (3)

(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad \varphi$ prosté, $\ker\varphi = \{\vec{o}\}$

$$\dim U = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi$$
$$\overset{\shortparallel}{n} = 0 + n$$

$\dim\operatorname{im}\varphi = n = \dim V$, $\operatorname{im}\varphi \subseteq V$ podprostor

$\Rightarrow \operatorname{im}\varphi = V$, φ je na.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\quad \operatorname{im}\varphi = V \Rightarrow \dim\operatorname{im}\varphi = \dim V = \dim U = n$

$$\dim U = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi$$
$$n = 0 + n$$

Odtud $\dim \ker\varphi = 0 \Rightarrow \ker\varphi = \{\vec{o}\}$. φ je prosté. φ je bijekce.

Důkaz věty o dimenzích

$U \supseteq \ker\varphi$, $\operatorname{im}\varphi \subseteq V$

$\dim U < \infty \Rightarrow \dim \ker\varphi < \infty$.

Vezmeme nějakou bázi podprostoru $\ker\varphi$

$u_1, u_2, \dots u_k$ báze $\ker\varphi$

Jsou lin. nezávislé v U a můžeme je doplnit na bázi U

$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$

$\dim \ker\varphi = k$, $\dim U = n$

Chceme dokázat, že $\dim \operatorname{im}\varphi = n-k$

K tomu najdeme bázi $\operatorname{im}\varphi$ o $n-k$ vektorech.

Které to jsou?

$$U \xrightarrow{\varphi} V$$

$u_1 \dots u_k \quad u_{k+1} \dots u_n$

$\varphi(u_1) = 0$

$\varphi(u_2) = 0 \dots \varphi(u_k) = 0$

Vezmeme vektory $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n) \in V$.

Stačí ukázat, že tvoří bázi $\operatorname{im}\varphi$.

(1) Vektory $\varphi(u_{k+1}), \dots \varphi(u_n)$ generují $\operatorname{im}\varphi$.

$v \in \operatorname{im}\varphi$, $\exists u \in U \quad v = \varphi(u)$

$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$

$$v = \varphi\left(\sum_{1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{o} + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \varphi(u_i)$$

(2) $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou lin. nezávislé.

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \varphi(u_i) = \vec{o}$$

$$\varphi\Big(\underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i}_{\in \ker\varphi}\Big) = \vec{o}$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i = \sum_{j=1}^{k} b_j u_j \qquad u_1 \dots u_k \text{ je báze } \ker\varphi$$

$$\sum_{j=1}^{k} (-b_j) u_j + \sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i = \vec{o}$$

$u_1, \dots u_n$ jsou lin. nezávislé, proto

$$-b_1 = -b_2 = \dots = -b_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0$$

Tedy $\varphi(u_{k+1}), \dots \varphi(u_n)$ jsou lin. nezávislé.

MATICE LIN. ZOBRAZENÍ

Víme: každé lin. zobrazení $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r$ je tvaru

$$\varphi(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

kde A je tvaru $r \times n$.

Nyní každému lin. zobrazení $\varphi : U \to V$, kde U je vekt. prostor s bazí $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ a V je vekt. prostor s bazí $\beta = (v_1, v_2, \dots v_k)$, přiřadíme matici A typu $k \times n$.

Bude to něco podobného, jako když vektoru přiřazujeme souřadnice.

Přiřazení: Sloupce matice A budou souřadnice vektorů $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots \varphi(u_n)$ v bázi β:

$$(\varphi)_{\underset{\text{báze } V}{\beta},\, \underset{\text{báze } U}{\alpha}} = A = \left((\varphi(u_1))_\beta \;\; (\varphi(u_2))_\beta \; \dots \; (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

Matice zobrazení φ v bázích α, β

Nechť $A = (a_{ij})$

$$\varphi(u_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{k1} v_k = (v_1, v_2, \dots v_k) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u_2) = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{k2} v_k = (v_1, v_2, \dots v_k) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi(u_n) = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \dots + a_{kn} v_k = (v_1, \dots v_k) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\left(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots \varphi(u_n)\right) = (v_1, v_2 \dots v_k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdot & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= (v_1, v_2, \dots v_k) \cdot A$$

<u>Příklad:</u> $U = \mathbb{R}_3[x] \qquad \alpha = (1, x, x^2, x^3)$
$V = \mathbb{R}_2[x] \qquad \beta = (1, x, x^2)$

$$\varphi : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

$$\varphi(p) = p' + 2p'' \qquad \begin{array}{l} p' \text{ je 1. derivace} \\ p'' \text{ je 2. derivace} \end{array}$$

je lin. zobrazení. Matice $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ je

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(1))_\beta, (\varphi(x))_\beta, (\varphi(x^2))_\beta, (\varphi(x^3))_\beta \right)$$

$$\varphi(1) = 1' + 2\cdot 1'' = 0 = \underline{0}\cdot 1 + \underline{0}\cdot x + \underline{0}\cdot x^2$$

$$(\varphi(1))_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = x' + 2\cdot x'' = 1 = \underline{1}\cdot 1 + \underline{0}\cdot x + \underline{0}\cdot x^2$$

$$(\varphi(x))_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^2) = (x^2)' + 2(x^2)'' = 2x + 4 = \underline{4}\cdot 1 + \underline{2}\cdot x + \underline{0}\cdot x^2$$

$$(\varphi(x^2))_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^3) = (x^3)' + 2(x^3)'' = 3x^2 + 2(3\cdot 2\cdot x) =$$
$$= 3x^2 + 12x = \underline{0}\cdot 1 + \underline{12}\cdot x + \underline{3}\cdot x^2$$

$$(\varphi(x^3))_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Věta: Pro matici lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ v bázích α a β platí

$$\forall u \in U : \quad (\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha .$$

Důkaz: Levá strana je složení dvou lin. zobrazení $u \mapsto \varphi(u)$, $v \mapsto (v)_\beta$

Tedy jde o lin. zobrazení $U \to \mathbb{K}^k$

Pravá strana je složení lin. zobrazení:

$u \mapsto (u)_\alpha$, $\quad x \mapsto (\varphi)_{\beta\alpha} \cdot x$

$U \to V$ $\quad \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$

To je rovněž lin. zobrazení.

K důkazu rovnosti dvou lin. zobrazení stačí ověřit, že se rovnají na vektorech báze: v našem případě na vektorech báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$P = (\varphi)_{\beta\alpha} \cdot (u_i)_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-té místo} \quad = \text{i-tý sloupec matice } (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

$u_i = 0\cdot u_1 + \dots + 1\cdot u_i + 0\cdot u_{i+1} \dots + 0\cdot u_n$

$= \left(\varphi(u_i)\right)_\beta = L$ podle definice matice $(\varphi)_{\beta,\alpha}$

Tím je rovnost obou stran dokázána.

Grafická interpretace předchozí rovnosti pomocí tzv. komutativního diagramu:

$$\begin{tikzcd}
\overset{u}{U} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] \arrow[rd, bend left=60, "(\varphi(u))_\beta"] & \overset{\varphi(u)}{V} \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\
\underset{(u)_\alpha}{K^n} \arrow[r, "x \mapsto (\varphi)_{\beta\alpha} \cdot x"'] \arrow[r, bend right=40, "(\varphi)_{\beta\alpha} \cdot (u)_\alpha"'] & K^k
\end{tikzcd}$$

Levá strana rovnosti $= (\varphi(u))_\beta$ odpovídá červené cestě v diagramu

Pravá strana $= (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$ odpovídá zelené cestě

Rovnost levé a pravé strany je vyjádřena výrokem, že diagram KOMUTUJE.

<u>Dokončení příkladu</u>

$U = \mathbb{R}_3[x]$ $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x]$ $\beta = (1, x, x^2)$

$\varphi(p) = p' + 2p''$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1 \in \mathbb{R}_3[x]$

$\varphi(p) = 2\, 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 5 + 2(2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x - 2) =$

$$= 6x^2 + 22x + 1 = \underline{1}\cdot 1 + \underline{22}\cdot x + \underline{6}\cdot x^2$$

$$(\varphi(p))_B = \begin{pmatrix}1\\22\\6\end{pmatrix}$$ levá strana rovnosti

Pravá strana:

$$(\varphi)_{B,\alpha}\cdot(p)_\alpha = \begin{pmatrix}0&1&4&0\\0&0&2&12\\0&0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\22\\6\end{pmatrix}$$

Obě strany se rovnají.