11. přednáška: HODNOST MATICE A VĚTY O SOUSTAVÁCH LINEÁRNÍCH ROVNIC

Nechť matice A je tvaru $k \times n$ nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.
Její sloupce budeme značit
$$s_1 A, s_2 A, \dots, s_n A \in \mathbb{K}^k$$
a její řádky
$$r_1 A, r_2 A, \dots, r_k A \in \mathbb{K}^n$$

Definujeme sloupcovou hodnost matice A jako
$$h_s(A) = \dim_{\mathbb{K}} [s_1 A, s_2 A, \dots, s_n A]$$
Protože $s_i A \in \mathbb{K}^k$ musí být
$$h_s(A) \leq k$$
Protože je sloupců n, je rovněž
$$h_s(A) \leq n$$
Tedy dohromady
$$h_s(A) \leq \min(k, n)$$
Lze také říci, že sloupcová hodnost je maximální počet lineárně nezávislých sloupců.

Obdobně, řádková hodnost matice A je
$$h_r(A) = \dim_{\mathbb{K}} (r_1 A, r_2 A, \dots, r_k A)$$
Analogicky
$$h_r(A) \leq \min(n, k)$$
a $h_r(A)$ je maximální počet lin. nezávislých řádků.

VĚTA Platí $h_s(A) = h_r(A)$.

Společnou hodnotu nazveme hodností matice A, značení $h(A)$.

Důkaz povedeme v několika krocích.

Lemma: Řádková hodnost matice se nemění při provádění elementárních řádkových operací.

Důkaz: Při provádění elementárních řádkových operací získáme z matice A matici B. Přitom

$$[r_1A, r_2A, \dots r_kA] = [r_1B, r_2B, \dots, r_kB].$$

Ukážeme to po jednotlivé operace

(1) B vznikne z A vynásobením např. 1. řádku číslem $c = 0$. Pak evidentně

$$[r_1A, r_2A, \dots r_kA] = [cr_1A, r_2A, \dots r_kA]$$

(2) B vznikne z A výměnou 1. a 2. řádku. Pak také

$$[r_1A, r_2A, \dots, r_kA] = [r_2A, r_1A, r_3A, \dots r_kA]$$

(3) B vznikne z A přičtením c-násobku 1. řádku k 2. řádku
Potřebujeme dokázat rovnost

$$U = [r_1A, r_2A, \dots, r_kA] = [r_1A, r_2A + cr_1A, r_3A, \dots r_kA] = V$$

První $U \supseteq V$. Všechny vektory vpravo leží v lineárním obalu U. Proto i lineární obal těchto vektorů musí být podmnožinou U. Tedy

$$U \supseteq V.$$

Nyní ukážeme $U \subseteq V$.

$r_1A \in V$, $r_2A = (r_2A + cr_1A) - cr_1A \in V$, $r_3A \in A$, atd.
Proto i každá lineární kombinace vektorů $r_1A, r_2A, \dots r_kA$ musí ležet ve V, neboť to je

vektorový podprostor. Tedy

$$U \subseteq V.$$

Stejné tvrzení platí pro sloupcovou hodnost a elementární sloupcové operace.

Jestliže tedy převedeme matici A pomocí element. řádk. operací na matici B ve schodovitém tvaru, tak

$$h_r(A) = h_r(B).$$

Navíc

$$h_r(B) = \text{počet nenulových řádků},$$

neboť nenulové řádky jsou výsledkem ve schod. tvaru matice B lineárně nezávislé.

Důkaz věty $h_r(A) = h_s(A)$.

Podle algoritmu, který vybírá ze sloupců lineárně nezávislé sloupce se stejným lineárním obalem platí, že po přechodu $A \rightsquigarrow B$ k matici ve schodovitém tvaru pomocí element. řádk. operací (Gaussově eliminaci)

$$\begin{aligned} h_s(A) &= \text{počet ved. koeficientů matice } B \\ &= \text{počet nenulových řádků matice } B \\ &= h_r(B) = h_r(A). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

Hodnost a determinant

Nechť A je matice $n \times n$. Pak platí

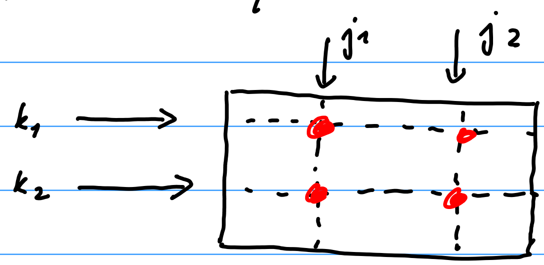
Věta: $\det A \neq 0$ právě když $h(A) = n$.

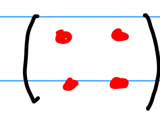
Důkaz: Pomocí Gaussovy eliminace dostaneme z A matici B ve schodovitém tvaru. Platí $\det A \neq 0$ právě když $\det B \neq 0$ právě když B nemá nulový řádek právě když $h(B) = n$ právě když $h(A) = h(B) = n$.

Poznámka: Lze dokázat daleko obecnější tvrzení: Je-li A matice tvaru $k \times n$, pak

$$h(A) = \max\{i \in \mathbb{N};\ \text{v } A \text{ existuje } i \text{ řádků a } i \text{ sloupců tak, že submatice } i \times i \text{ jimi určená má } \det \neq 0\}.$$

Např. pro $i = 2$, vezmeme



a spočítáme det 

Vybraná submatice 2×2 je určena červeně označenými prvky.

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Uvedeme tři základní obecné věty o řešení soustav lineárních rovnic. Ve dvou z nich se vyskytuje hodnost matice.

Budeme uvažovat matici $A \in Mat_{k \times n}(\mathbb{K})$, neznámé $x \in \mathbb{K}^n$ a pravou stranu $b \in \mathbb{K}^k$ a soustavu $$Ax = b.$$

(1) Věta o dimenzi řešení homogenní soustavy

Množina řešení homogenní soustavy

$$A x = 0$$

je vektorový podprostor v K^n dimenze

$$n - h(A).$$

Důkaz: $Res(A, 0) = \{x \in K^n, Ax = 0\}$

Uvažujme lin. zobrazení

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^k \quad \varphi(x) = Ax.$$

Pak

$$Res(A, 0) = \ker \varphi$$

je vekt. podprostor a navíc platí, že

$$\dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{im} \varphi$$

Protože $\operatorname{im} \varphi = [\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)] = [s_1 A, s_2 A, .. s_n A]$,

je $\dim \operatorname{im} \varphi = h_s(A) = h(A)$.

Tedy

$$\dim Res(A, 0) = \dim \ker \varphi = n - \dim \operatorname{im} \varphi$$
$$= n - h(A).$$

Příklad: Přímka v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem má dimenzi 1 a je dána soustavou 2 lineárních homogenních rovnic

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0$$

Rovnice musí být lineárně nezávislé, jinak by popisovaly rovinu nebo celé $\mathbb{R}^3$.

Dimenze množiny řešení je pak v souladu s předchozí větou

$$\dim (A, 0) = 3 - h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Analogicky pro rovinu v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem, která je popsána rovnicí

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

② Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy rovnic

Soustava lineárních rovnic

$$A x = b$$

má řešení **právě když**

$$h(A) = h(A|b)$$

Důkaz: Nechť má soustava $Ax = b$ řešení $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Pak lze rovnost $Ax = b$ přepsat takto

$$s_1A \cdot x_1 + s_2A \cdot x_2 + \dots + s_nA\, x_n = b.$$

To znamená, že b je lineární kombinací sloupců matice A, a proto

$$[s_1A, s_2A, \dots s_nA] = [s_1A, \dots s_n(A), b]$$

Proto

$$h(A) = \dim[s_1A, \dots, s_nA] = \dim[s_1A, \dots, s_nA, b] = h(A|b)$$

Obráceně, nechť $h(A) = h(A|b)$. Pak

$$\dim[s_1A, \dots, s_nA] = \dim[s_1A, \dots, s_nA, b].$$

Evidentně

$$[s_1A, \dots, s_nA] \subseteq [s_1A, \dots, s_nA, b].$$

Protože jsou to podprostory stejné dimenze, musí se rovnat, tj.

$$[s_1A, \dots, s_nA] = [s_1A, \dots, s_nA, b]$$

To znamená, že b je lineární kombinací sloupců matice A

$$x_1 s_1 A + x_2 s_2 A + \dots + x_n s_n A = b$$

Tedy
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

a soustava je řešitelná.

③ Věta o struktuře řešení

Nechť $Res(A|b) = \{x \in \mathbb{K}^n ; Ax = b\}$. Nechť soustava

$$Ax = b$$

má nějaké řešení $z \in \mathbb{K}^n$. Potom platí

$$\begin{aligned} Res(A|b) &= \{z + y \in \mathbb{K}^n, \text{ kde } y \in Res(A|0)\} \\ &= z + Res(A, 0) \end{aligned}$$

Důkaz:

① $\{z + y \in \mathbb{K}^n, \ y \in Res(A|0)\} \subseteq Res(A|b)$.

Platí $Az = b$ a $Ay = 0$, pak
$$A(z+y) = Az + Ay = b + 0 = b,$$
tedy $z + y \in Res(A|b)$.

② $Res(A|b) \subseteq \{z+y \in \mathbb{K}^n, \ y \in Res(A|0)\}$

Nechť $x \in Res(A|b)$. Pak $Ax = b$. Rovněž $Az = b$. Potom
$$x = z + (x - z)$$
a přitom
$$A(x-z) = Ax - Az = b - b = 0.$$
Tedy volíme $y = x - z \in Res(A, 0)$.
Pak $x = z + y$ je prvkem množiny vpravo.